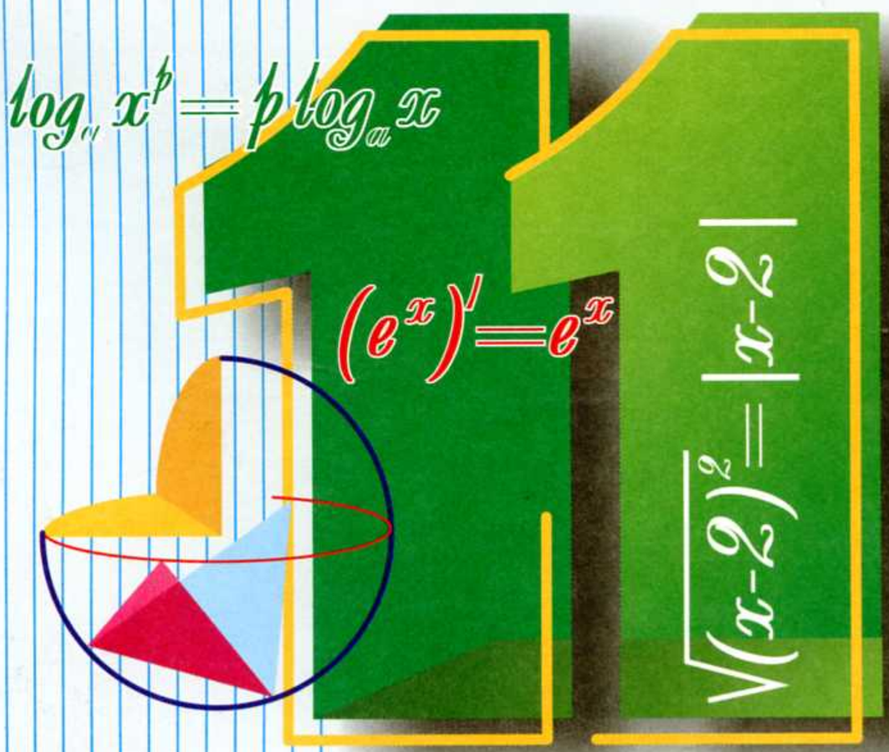
ШКОЛЬНЫЙ КОНСПЕКТ

Ершова А.П.
Голобородько В.В.
Крижановский А.Ф.

$y=a^x$

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО АЛГЕБРЕ



А.П. Ершова, В.В. Голобородько,
А.Ф. Крижановский

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

(*по учебнику под ред. А.Н. Колмогорова*)

учени____ 11—___ класса

____

____

____

____

Москва
ИЛЕКСА
2011

Рецензенты:

Ю.В. Гандель — доктор физико-математических наук, профессор Харьковского Национального университета им. В.Н.Каразина;

В.А. Лысенко — учитель-методист Авторской школы Бойко, г. Харьков.

Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф.

Тетрадь-конспект по алгебре и началам анализа для 11 класса.— М.: ИЛЕКСА, 2011.— 144 с.

ISBN 978-5-89237-149-0

Тетрадь-конспект содержит все основные теоретические сведения курса алгебры 11 класса (по учебнику под ред. А.Н. Колмогорова). **Типовые задания** описывают простейшие и более сложные ситуации применения изученных понятий и фактов, часто встречающихся в самостоятельных и контрольных работах. **Полезные задания** описывают дополнительные алгебраические факты. Ко всему материалу приводятся схемы решения задач, графики, таблицы и методические рекомендации. В таблицах и типовых заданиях оставлено место для самостоятельного заполнения учащимися. К отдельным задачам приведены решения или указания к решению.

ISBN 978-5-89237-149-0

Дорогие друзья!

Если вы уже купили эту тетрадь-конспект, то у вас наверняка есть свой собственный взгляд на ее эффективное использование. Если же вы раздумываете – покупать или не покупать, пригодится или будет лежать на полке, – то мы можем вкратце, учитывая собственный опыт работы по учебнику под ред. А. Н. Колмогорова с такими тетрадями, рассказать о той несомненной пользе, которую они приносят на практике.

1. В этой тетради **уже проделана вся рутинная работа** по записи определений, формул, условий задач – Вам остается только заполнить необходимые доказательства и решения.
2. Для основных типов упражнений и задач в тетради приводятся **схемы решения**, в которых даются пошаговые указания последовательности действий и преобразований, приводящих к требуемому результату. В каждой схеме предусмотрена колонка примеров, заполнив которую можно создать образец применения схемы в конкретном примере (задаче) с учетом всех тонкостей и математических нюансов, которые могут при этом встретиться.
3. В этой тетради много ***типовых заданий***, то есть заданий, подобные которым часто встречаются на самостоятельных, контрольных и тематических работах. Их решения желательно оформить **как образец** с учетом всех действующих требований – это облегчит подготовку ко всем письменным работам, в том числе и к экзаменам.
4. Для **более глубокого изучения** алгебры предназначены ***полезные задания***, в которых приводятся дополнительные формулы и факты, которые можно получить на основании изученного материала. Эти задания решаются в тетрадях для практических работ. Много интересного дополнительного материала вы найдете и в главе «Приложение».

И, наконец, эта тетрадь создавалась, в первую очередь,
для того, чтобы **существенно сэкономить время**
урока и ваше личное время.

Желаем вам успехов!

Будем благодарны за ваши замечания и доброжелательные отзывы,
которые вы можете разместить на нашем сайте www.axiom.com.ua.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Первообразная

Первообразная	Определение	Пример
	Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $$F'(x) = f(x).$$ Операция нахождения первообразной $F(x)$ для данной функции $f(x)$ называется **интегрированием.** ***Замечания.*** 1) Любая непрерывная на промежутке функция $f(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. 2) Операция интегрирования — обратная к операции дифференцирования.	*Докажите, что функция* $F(x) = \frac{1}{2}\sin 4x$ *есть первообразная для функции* $f(x)=2\cos 4x$ *на* $\boldsymbol{R}$.
Теорема **(*признак постоянства функции*)**	**Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I, то функция F — постоянная на этом промежутке.** *Доказательство.*	

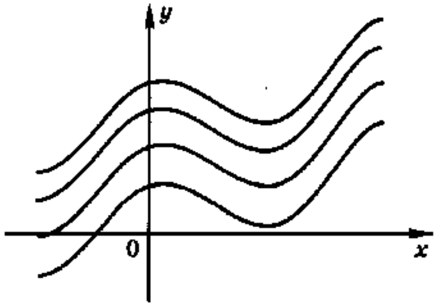
<table>
<tr>
<td><u>Теорема</u>
(основное свойство первообразных)</td>
<td>Любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке I может быть записана в виде $F(x)+C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, а C — произвольная постоянная.
Это означает:
1) Для любого числа C функция $F(x)+C$ — первообразная для $f(x)$ на промежутке I;
2) Если $\Phi(x)$ — любая первообразная для $f(x)$ на промежутке I, то найдется число C, такое, что $\Phi(x)=F(x)+C$.
Доказательство.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Замечания.
1) При нахождении первообразной функции $f(x)$ промежуток, на котором задана функция $f(x)$, обычно указывают.
2) Формула $F(x)+C$ задает общий вид первообразных для функции f.</td>
</tr>
<tr>
<td>Геометрический смысл основного свойства первообразных</td>
<td>Графики любых двух первообразных для функции $f(x)$ получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.

</td>
</tr>
</table>

Таблица первообразных для некоторых функций[1]

Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x)$ (C— постоянная)
k (постоянная)	$kx + C$
$x^n \quad (n \in Z, n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$	$2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right)$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi n,\ n \in Z)$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$	$\arcsin x + C$ или $-\arccos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x + C$ или $-\mathrm{arcctg}\, x + C$

Три правила нахождения первообразных	Правило	Доказательство или пример
	1. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.	
	2. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$.	

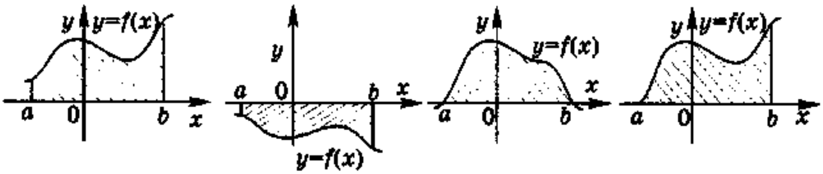
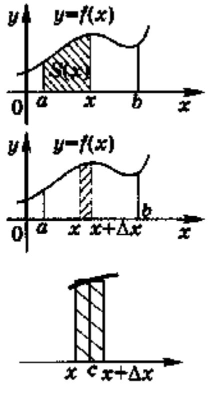
[1] Формулы таблицы верны на любом промежутке, где функция $f(x)$ непрерывна.

	3. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.	

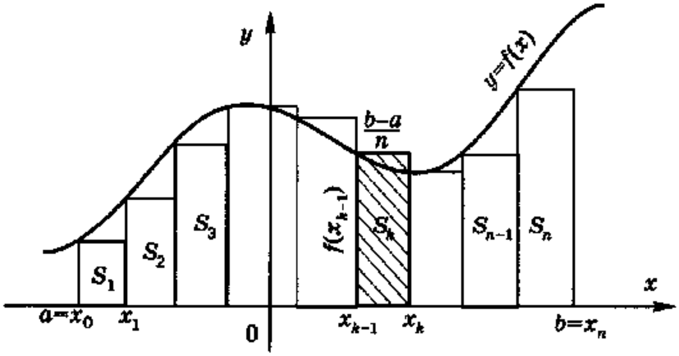
Типовое задание	***Для функции $f(x)$ найдите общий вид первообразных:*** *а)* $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; *б)* $f(x) = 2\cos^2 2x$. ***Решение.*** ***Ответ:** б)* $F(x) = x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$. ***Указание. Используйте тригонометрическую формулу понижения степени для данной функции.***
Типовое задание	***Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку A:*** *а)* $f(x) = 2\cos 2x - 3\sin 3x$, $A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; *б)* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $A(1;\ 2)$. ***Решение.***

	Ответ: *а*) $F(x) = \sin 2x + \cos 3x$; *б*) $F(x) = \sqrt{2x-1} + 1$.
Полезное задание	*Для функции* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *найдите первообразную, график которой проходит через точки* $(1;\ 0)$ *и* $(-1;\ 5)$. *Указание. Рассмотрите различные значения константы на промежутках* $(-\infty;\ 0)$ *и* $(0;\ +\infty)$.

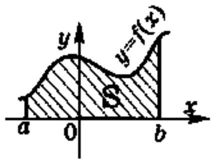
Интеграл

Криволинейная трапеция	Пусть на отрезке $[a;b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$, не меняющая на нем знака. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$. 
Теорема (*о площади криволинейной трапеции*) 	**Если $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция, а $F(x)$ — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a;b]$, т. е.** $$S = F(b) - F(a).$$ *Доказательство.*

Интегральная сумма



Пусть $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция. Отрезок $[a;b]$ разбит точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$

	на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. На каждом из этих отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$ как на основании построен прямоугольник, высота которого равна $f(x_{k-1})$, ширина — $\dfrac{b-a}{n}$, а площадь — $\dfrac{b-a}{n}\cdot f(x_{k-1})$. Сумма $S_n = \dfrac{b-a}{n}\big(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\big)$ равна сумме площадей прямоугольников и называется ***интегральной суммой***. Если функция $f(x)$ не является неотрицательной, то интегральная сумма S_n по определению задается той же формулой.
Интеграл	**Интегралом** (определенным интегралом) функции $f(x)$ от a до b называется число, к которому стремится сумма S_n при n, стремящемся к бесконечности: $S_n \to S = \int\limits_a^b f(x)dx$ при $n \to \infty$. ***Читается***: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс». ***Названия символов***: **a — нижний предел интегрирования,** **b — верхний предел интегрирования,** **$\int$ — знак интеграла,** **$f(x)$ — подынтегральная функция,** **x — переменная интегрирования,** **$f(x)dx$ — подынтегральное выражение**[1].
Геометрический смысл интеграла  	Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади S соответствующей криволинейной трапеции: $\int\limits_a^b f(x)dx = S.$
Формула Ньютона – Лейбница	**Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a;b]$. Если $F(x)$ — первообразная для f на $[a;b]$, то** $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

[1] Выражение dx можно трактовать как дифференциал переменной x.

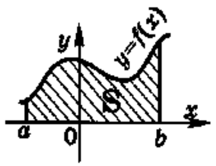
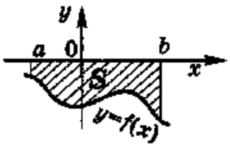
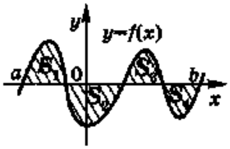
	Замечание. Для удобства записи разность $F(b)-F(a)$ принято сокращенно обозначать $F(x)\Big\vert_a^b$, а формулу Ньютона – Лейбница записывать в виде $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b$.
Типовое задание	*Вычислите:* *а)* $\int\limits_{-2}^{1} x^3 dx$; *б)* $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$. *Решение.* *Ответ:* *а)* $-3{,}75$; *б)* $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Основные свойства интеграла

Формула	Пример
$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$	$\int\limits_2^2 \sin x dx = 0$
$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$ [1]	$\int\limits_4^1 x dx = -\int\limits_1^4 x dx = -\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_1^4 = -(8-0,5) = -7,5$
$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где $k \in \mathbb{R}$	$\int\limits_{-1}^{2} 3x^2 dx = 3\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = \left(3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_{-1}^{2} = 8-(-1) = 9$

[1] Эта формула принимается по определению.

$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$	$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 2x + \cos\frac{x}{3}\right)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{1}{3}x dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big\|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(3\sin\frac{1}{3}x\right)\Big\|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(-1-(-1)) + 3\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 3$
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$	$\int\limits_{-1}^{1} \|x\|\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \|x\|\,dx + \int\limits_{0}^{1} \|x\|\,dx = \int\limits_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} x dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_{0}^{1} = \left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}-0\right) = 1$
Типовое задание	***Вычислите интеграл:*** *а)* $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; *б)* $\int\limits_{1}^{2} \left(3x^2 - 4x - \frac{2}{x^2}\right)dx$; *в)* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos 3x dx$. ***Решение.***

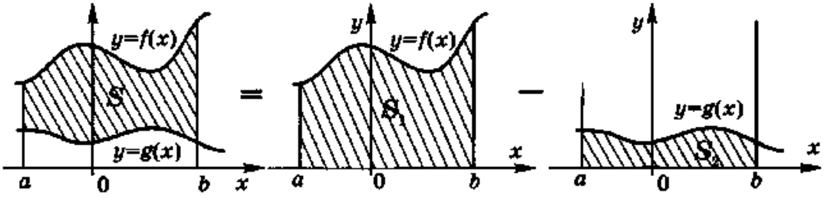
	Ответ: *а*) 2; *б*) 0; *в*) $\frac{1}{6}$.
Связь между интегралом и площадью   	• **Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = S$.** • **Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \leq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -S$.** • **Если функция $f(x)$ непрерывна и ее график пересекает отрезок $[a;b]$ в конечном числе точек, то $\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.** **Это означает, что при вычислении интеграла площади фигур, лежащих выше оси Ox, учитываются со знаком «+», а площади фигур, лежащих ниже оси Ox, — со знаком «–».**
Полезное задание	***Докажите свойства интеграла, приведенные в этом разделе, двумя способами: с помощью формулы Ньютона – Лейбница и исходя из геометрического смысла интеграла.***
Полезное задание	***Докажите, что:*** $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, *если $f(x)$ — нечетная функция,* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, *если $f(x)$ — четная функция.*

Применение интеграла

Вычисление площадей плоских фигур	**Если фигура ограничена графиками непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ ($f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$), то площадь фигуры может быть вычислена двумя способами:**

1) как разность площадей соответствующих криволинейных трапеций:

$$S = S_1 - S_2 .$$



2) по формуле $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$

Замечание. Эта формула справедлива для любых непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ (не только неотрицательных), для которых на этом отрезке выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$.

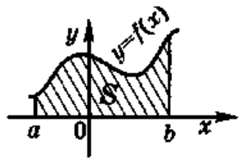
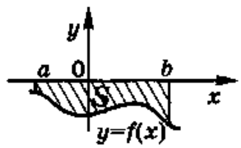
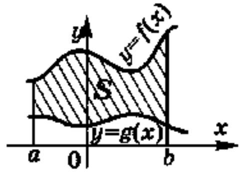
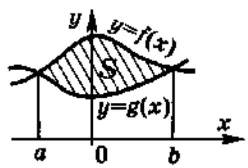
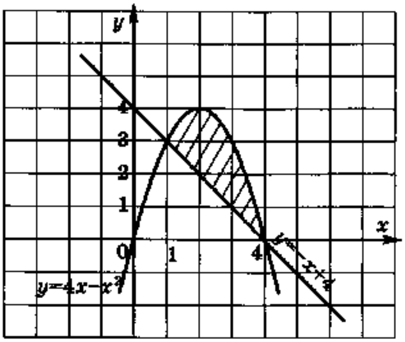
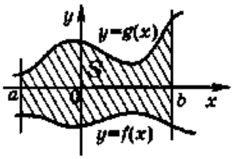
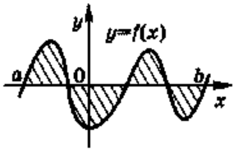
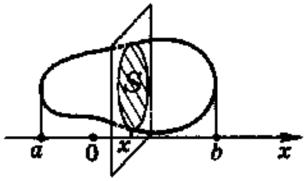
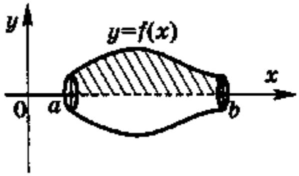
Формула	Графическая иллюстрация
$S = \int_a^b f(x)dx$	
$S = -\int_a^b f(x)dx$	
$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$	
	

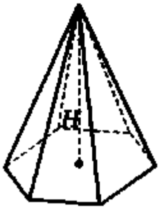
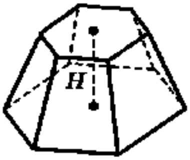
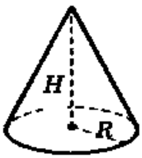
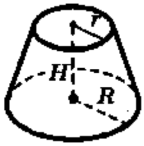
Схема решения задач на вычисление площадей фигур по формуле $S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$

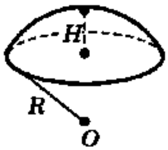
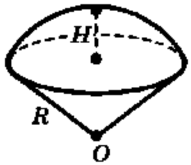
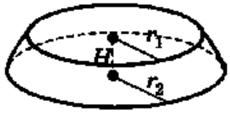
Этапы решения	Примеры	
	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$ *и* $y = -x + 4$.	*Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = 3 - x - x^2$ *и* $y = x + 3$.
1. Изобразите фигуру, площадь которой надо найти.		
2. Если одна или обе прямые $x=a$ **и** $x=b$**, ограничивающие фигуру, не заданы, найдите абсциссы точек пересечения графиков функций** $f(x)$ **и** $g(x)$**, решив уравнение** $f(x)=g(x)$.	$4x - x^2 = -x + 4$ $x^2 - 5x + 4 = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4. \end{array}\right.$ Отсюда $a=1$, $b=4$.	
3. Найдите площадь фигуры по формуле $S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$.	$S = \int_1^4 \left(\left(4x - x^2\right) - \left(-x + 4\right)\right)dx =$ $= \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx =$ $= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Big\|_1^4 = 4{,}5.$	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: 4,5.	*Ответ*: $1\frac{1}{3}$.

Типовое задание	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2$ и $y = x^3$.*** ***Решение.*** ***Ответ*: 6,75.**
Полезное задание  	***Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$ и $x=b$ и графиками непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что $f(x) \geq g(x)$ или $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in [a;b]$, можно вычислить по формуле*** $S = \left\| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right\|.$ *Докажите.*
 	***Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$ и $x=b$, осью Ox и графиком непрерывной функции $f(x)$ ($x \in [a;b]$), пересекающим ось Ox в конечном числе точек, можно вычислить по формуле*** $S = \int_a^b \|f(x)\|dx.$ **Докажите.**

<table>
<tr><th>Вычисление объемов тел</th><th>Формула</th><th>Графическая иллюстрация</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Пусть задано тело объемом V, $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку $x \in [a;b]$. $x=a$ и $x=b$ — уравнения плоскостей, ограничивающих тело, тогда
$$V=\int_a^b S(x)dx.$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Объем тела вращения
Пусть задано тело объемом V, которое получается при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на $[a;b]$ функции $f(x)$, тогда
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Типовое задание</td><td colspan="2">Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.
Решение.</td></tr>
</table>

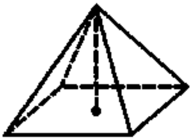
Ответ: $\frac{178\pi}{15}$.

Полезное задание	***Докажите формулы для объемов геометрических тел:***	
	Пирамида 	$V = \frac{1}{3}S_{осн}H$
	Усеченная пирамида 	$V = \frac{1}{3}H\left(S + s + \sqrt{Ss}\right)$, где S и s — площади оснований усеченной пирамиды
	Конус 	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
	Усеченный конус 	$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

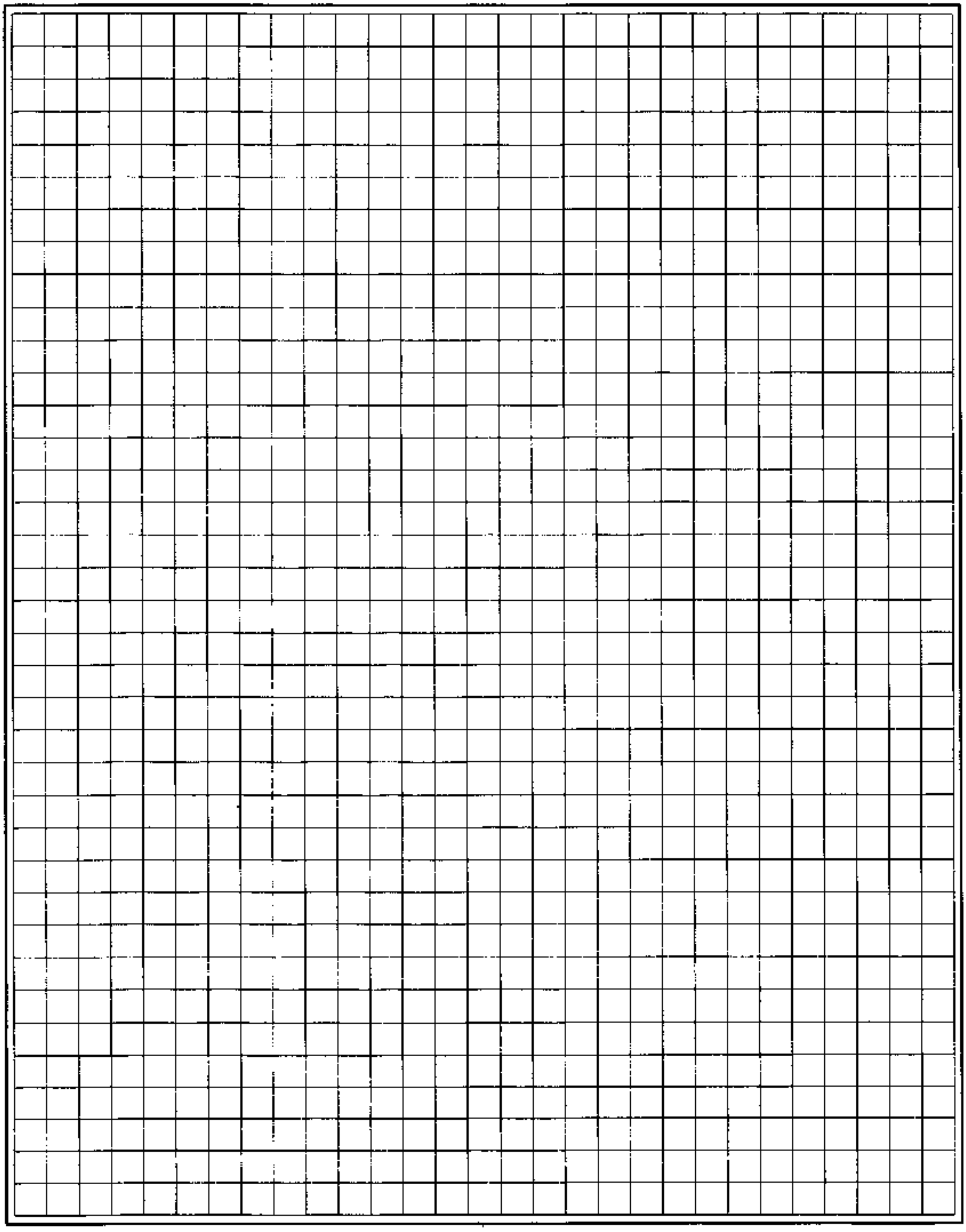
	Шар 	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
	Шаровой сегмент 	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$
	Шаровой сектор 	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$
	Шаровой слой 	$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)H$

Применение интеграла в физике

	Формула	*Типовая задача*
Вычисление расстояния по известному закону изменения скорости	$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt,$ где s — расстояние, пройденное телом при прямолинейном движении за интервал времени от t_1 до t_2 со скоростью $v = v(t)$.	*Тело движется прямолинейно со скоростью, которая изменяется по закону* $v = 3t + 2$ *(расстояние измеряется в метрах, время – в секундах). Найдите расстояние, пройденное телом за интервал времени от* $t_1 = 2$ *с до* $t_2 = 4$ *с.* *Решение.*

		Ответ: 22 *м.*
Вычисление работы переменной силы	$$A = \int_a^b F(x)dx,$$ где A — работа переменной силы F при перемещении тела из точки a в точку b.	***Какую работу надо произвести, чтобы сжать пружину на 4 см, если сила 2 Н сжимает ее на 2 см?*** ***Решение.***
Вычисление массы неоднородного стержня	$$m = \int_{l_1}^{l_2} \rho(l)dl,$$ где m — масса стержня на отрезке $[l_1;l_2]$, если его линейная плотность $\rho = \rho(l)$.	
Вычисление количества электричества	$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt,$$ где Q — количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника за интервал времени от t_1 до t_2, если сила тока $I = I(t)$.	*Ответ*: 0,08 *Дж.*
Полезное задание 	***Пирамида Хеопса является правильной четырехугольной пирамидой со стороной основания 232 м и высотой 147 м. Она построена из камня с плотностью 2,5 г/см³. Найдите затраченную при постройке работу, совершенную против силы тяжести.***	

Дополнительные сведения и задачи по теме



ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

Корень n-й степени и его свойства

Корень n-й степени	Определение	Пример
	Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a. Другими словами, корни n-й степени из числа a — это решения уравнения $x^n = a$.	Корни 4-ой степени из числа 16 равны 2 и −2, так как $2^4=16$ и $(-2)^4=16$.
	Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a. ***Обозначение.*** Арифметический корень n-й степени из a обозначается $\sqrt[n]{a}$, где a — **подкоренное выражение**, n — **показатель корня**, $\sqrt{\ }$ — **знак корня** или **радикал**. Для корней нечетной степени из отрицательных чисел также используется знак $\sqrt[n]{\ }$.	$\sqrt[4]{1} =$ $\sqrt[5]{243} =$ $\sqrt[3]{125} =$ $\sqrt[6]{64} =$ $\sqrt[5]{-32} =$
	Если $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, то $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$	

Свойства корня n-й степени	Свойство	
	n — четное	**n — нечетное**
	1. **Если $a>0$**, то существует два противоположных корня n-й степени из a:	**Для любого числа a** существует единственный корень n-й степени из a.

	$\sqrt[n]{a}$ — положительный корень, $-\sqrt[n]{a}$ — отрицательный корень.	Запись $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a.
	2. **Если** $a=0$, то существует один корень n-й степени из a и он равен нулю: $\sqrt[n]{0}=0$.	Для корней нечетной степени справедливо равенство $$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a},$$ которое позволяет выразить корень нечетной степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени.
	3. **Если** $a<0$, то корня четной степени из a не существует. Запись $\sqrt[n]{a}$ в этом случае не имеет смысла.	
	Корень четной степени из выражения, возведенного в ту же степень, равен модулю этого выражения: $$\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert, k\in N.$$	Корень нечетной степени из выражения, возведенного в ту же степень, равен этому выражению: $$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a, k\in N.$$

Свойства арифметического корня n-й степени

Свойство (для любых натуральных n, m ($n\neq1$, $m\neq1$), целых k и любых неотрицательных a и b)	**Правило**	**Доказательство или пример**
Корень из произведения: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	Корень n-й степени из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней n-й степени из этих множителей.	
Корень из дроби: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq0)$	Корень n-й степени из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню n-й степени из числителя, деленному на корень n-й степени из знаменателя.	

Корень из корня: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	**Корень n-й степени из корня m-й степени из неотрицательного числа равен корню из данного числа с показателем, равным произведению показателей данных корней.**	
Корень из степени: $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$; если $k<0$, то $a \neq 0$	**Корень n-й степени из k-й степени неотрицательного числа равен k-й степени корня n-й степени из этого числа.**	
Сокращение показателей: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(k>0)$	**Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.**	
Следствия из свойств	**Правило**	**Пример**
Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a\rvert\sqrt[n]{b}$, где n – четное, $b \geq 0$; $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, где n – нечетное.	$\sqrt[4]{32a^6b^8c^2} =$ $\sqrt[5]{a^{10}b^5c} =$
Внесение множителя под знак корня	Для четных n: $a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a \geq 0, b \geq 0), \\ -\sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a < 0, b \geq 0). \end{cases}$ Для нечетных n: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.	$a^3b^2\sqrt[4]{-a} =$ $xy^2\sqrt[5]{-x} =$

Типовое задание	*Вычислите*: *а*) $\sqrt[4]{162\cdot 8}-\sqrt[3]{2^9}$; *б*) $\sqrt[5]{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{3+2\sqrt{2}}$. ***Решение.*** ***Ответ***: *а*) -2; *б*) 1.
Типовое задание	*Сравните числа*: *а*) $\sqrt[4]{4}$ *и* $\sqrt[3]{3}$; *б*) $\sqrt[5]{-\frac{31}{32}}$ *и* -1. ***Решение.***
Типовое задание	*Упростите выражение* $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}+2}+a$ *при* $0<a<1$. ***Решение.*** ***Ответ***: 1.

Иррациональные уравнения и системы

Иррациональное уравнение	**Иррациональным уравнением** называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня.	
Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = a$	**Метод решения**	**Пример**
	Если $a \geq 0$, то уравнение сводится к уравнению $f(x)=a^2$.	$\sqrt{x^2+5x+3}=3$
	Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.	$\sqrt{x^7+2004}=-1$
Основные методы[1] решения иррациональных уравнений	<u>**Идея решения**</u>: сведение данного уравнения к одному или нескольким рациональным уравнениям. <u>**Методы решения**</u>: • переход к уравнению-следствию; • переход к равносильной системе (или равносильному уравнению); • замена переменной.	
Особенности решения иррациональных уравнений	• При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается **уравнение-следствие**, то есть такое уравнение, корнями которого являются все корни данного уравнения (но не наоборот!). В результате этой операции могут появиться **посторонние корни**. • Появление **посторонних корней** чаще всего связано либо с расширением ОДЗ уравнения, либо с превращением неверного равенства в верное при возведении уравнения в четную степень ($-1=1$ — неверное равенство, $(-1)^2=1^2$ — верное равенство). • Корни, полученные таким способом, нуждаются в **проверке**.	

Схема решения иррациональных уравнений с помощью уравнений-следствий

Этапы решения	**Примеры**	
	$\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{3-x}=$ $=\sqrt{11-x}\cdot\sqrt{2x-3}$	$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$

[1] Другие методы решения иррациональных уравнений и неравенств см. в приложении.

1. Перейдите от уравнения к его следствию (чаще всего для этого обе части уравнения возводят в степень, чтобы избавиться от корней).	Возведем обе части уравнения в квадрат: $(x+7)(3-x)=$ $=(11-x)(2x-3)$.	
2. Найдите корни уравнения-следствия.	$3x-x^2+21-7x=$ $=22x-33-2x^2+3x;$ $x^2-29x+54=0;$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=27. \end{array}\right.$	
3. Проверьте найденные корни.	Проверка: 1. $x=2$: $\sqrt{2+7}\cdot\sqrt{3-2}=$ $=\sqrt{11-2}\cdot\sqrt{2\cdot 2-3}$, 3=3 — верно. 2. $x=27$: $\sqrt{27+7}\cdot\sqrt{3-27}=$ $=\sqrt{11-27}\cdot\sqrt{2\cdot 27-3}$ — равенство не имеет смысла. Следовательно, $x=2$ — корень уравнения.	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: 2.	*Ответ*: 5.

Основные виды иррациональных уравнений

$$\sqrt{f(x)}=g(x)$$

Схема решения	Примеры	
1-ый способ (с помощью уравнений-следствий)	$\sqrt{5-x^2}=x-1$	$\sqrt{2x-3}=x-3$
1. Возведите левую и правую части уравнения в квадрат.	$5-x^2=x^2-2x+1$	

2. Решите полученное уравнение-следствие.	$2x^2-2x-4=0$; $x^2-x-2=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2.\end{array}\right.$	
3. Сделайте проверку.	Проверка: 1. $x=-1$: $\sqrt{5-1}=-1-1$, 2=–2—неверно. 2. $x=2$: $\sqrt{5-4}=2-1$, 1=1—верно. Следовательно, $x=2$ — корень уравнения.	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: 2.	*Ответ*: 6.

Замечание. Аналогично решаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$, где $n\in N$, $n>2$. При этом возведение в нечетную степень не приводит к появлению посторонних корней.

2-ой способ (с помощью равносильной системы)	$\sqrt{6x-x^2-1}=3-x$	$\sqrt{x+3}=x+1$
1. Запишите систему, равносильную данному уравнению: $\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$	$\begin{cases}6x-x^2-1=(3-x)^2,\\ 3-x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}6x-x^2-1=9-6x+x^2,\\ 3-x\ge 0.\end{cases}$	
2. Решите систему.	$\begin{cases}2x^2-12x+10=0,\\ x\le 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-6x+5=0,\\ x\le 3;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=5,\end{array}\right.\\ x\le 3;\end{cases}$ $x=1$.	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: 1.	*Ответ*: 1.

Замечания.

1) Условие $f(x)=g^2(x)$ обеспечивает выполнение условия $f(x)\ge 0$, поэтому включение данного неравенства в равносильную систему нецелесообразно.

<table>
<tr><td colspan="3">2) Неравенство, входящее в равносильную систему, можно не решать: достаточно подставить в него найденные корни и проверить истинность полученного числового неравенства.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$</td></tr>
<tr><td>1-ый способ (с помощью уравнений-следствий)</td><td>$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$</td><td>$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{x - 3}$</td></tr>
<tr><td>1. Возведите левую и правую части уравнения в квадрат.</td><td>$x^2 - 4 = 3x$</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Решите полученное уравнение-следствие.</td><td>$x^2 - 3x - 4 = 0;$
$\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 4. \end{array}\right.$</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Сделайте проверку.</td><td>Проверка:
1. $x = -1$: $\sqrt{1-4} = \sqrt{-3}$ — выражение не имеет смысла.
2. $x = 4$: $\sqrt{16-4} = \sqrt{12}$ — верно.
Следовательно, $x = 4$ — корень уравнения.</td><td></td></tr>
<tr><td>4. Запишите ответ.</td><td>Ответ: 4.</td><td>Ответ: 3.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замечание. Аналогично решаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, где $n \in N$, $n > 2$. При этом возведение в нечетную степень не приводит к появлению посторонних корней.</td></tr>
<tr><td>2-ой способ (с помощью равносильной системы)</td><td>$\sqrt{x^2 - 7} = \sqrt{6x}$</td><td>$\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x - 5}$</td></tr>
<tr><td>1. Запишите систему, равносильную данному уравнению:
$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \ (\text{или } g(x) \ge 0). \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x^2 - 7 = 6x, \\ 6x \ge 0. \end{cases}$</td><td></td></tr>
</table>

2. Решите систему.	$\begin{cases} x^2 - 6x - 7 = 0, \\ x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 7, \end{array}\right. \\ x \ge 0; \end{cases}$ $x = 7.$	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: 7.	*Ответ*: 4.

Замечания.

1) Из двух неравенств $f(x)\ge 0$ или $g(x)\ge 0$ обычно выбирается то, которое легче решить.

2) Неравенство, входящее в равносильную систему, можно не решать: достаточно подставить в него найденные корни и проверить истинность полученного числового неравенства.

Типовое задание	***Решите уравнение:*** *а)* $\sqrt{x-5} = x-7$; *б)* $\sqrt{2x^2-10x+11} = \sqrt{x^2-4x+3}$. ***Решение.*** *Ответ*: *а)* 9; *б)* 4.

$A\sqrt{f(x)} + B\sqrt{g(x)} = C$		
Этапы решения	$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$	$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$
1. Уедините один из корней.	$\sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{2x-3}$.	
2. Возведите обе части уравнения в квадрат.	$x+2+1-2\sqrt{x+2} = 2x-3$.	
3. Уедините оставшийся корень и приведите подобные слагаемые.	$6 - x = 2\sqrt{x+2}$.	
4. Возведите обе части уравнения в квадрат.	$36 - 12x + x^2 = 4(x+2)$.	
5. Решите уравнение-следствие.	$x^2 - 16x + 28 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 14. \end{array}\right.$	
7. Сделайте проверку.	**Проверка:** **1.** $x = 2$: $\sqrt{2+2} - \sqrt{4-3} = 1$ **— верно.** **2.** $x = 14$: $\sqrt{14+2} - \sqrt{28-3} = 1$, **4–5=1 — неверно.** **Следовательно,** $x = 2$ **— корень уравнения.**	
8. Запишите ответ.	***Ответ*: 2.**	***Ответ*: 5.**

$Af(x)+B\sqrt{f(x)}+C=0$		
Этапы решения	$x^2+8x-2\sqrt{x^2+8x}-3=0$	$x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}=12$
1. Сделайте замену переменной $y=\sqrt{f(x)}$.	Замена: $y=\sqrt{x^2+8x}$.	
2. Решите полученное квадратное уравнение.	$y^2-2y-3=0$; $\left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=3. \end{array}\right.$	
3. Сделайте обратную замену и решите уравнения вида $\sqrt{f(x)}=a$.	$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+8x}=-1, \\ \sqrt{x^2+8x}=3. \end{array}\right.$ Первое уравнение решений не имеет. $\sqrt{x^2+8x}=3$; $x^2+8x-9=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=1. \end{array}\right.$	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: −9; 1.	*Ответ*: −4; 2.

Замечание. Аналогично с помощью замены переменной решаются уравнения вида $A\sqrt[n]{f(x)}+B\sqrt[2n]{f(x)}+C=0$.

Типовое задание	*Решите уравнение*: а) $\sqrt{2x+6}+\sqrt{4+x}=7$; б) $5\sqrt[4]{x-3}+6=\sqrt{x-3}$. *Решение.*

	Ответ: *а*) 5; *б*) 1299.

Системы иррациональных уравнений

Решение систем иррациональных уравнений	**Для решения систем иррациональных уравнений применяются методы решения систем рациональных уравнений: подстановки, сложения, умножения и т. д., но с учетом особенностей решения иррациональных уравнений.**	
Схема решения на примере	**Примеры**	
	$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} - \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10. \end{cases}$
1. Сделайте замену переменных.	$\begin{cases} u = \sqrt[4]{x+y}, \\ v = \sqrt[4]{x-y}. \end{cases}$	
2. Решите полученную систему рациональных уравнений.	$\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} u - v = 2, \\ (u-v)(u+v) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} u - v = 2, \\ 2 \cdot (u+v) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} u - v = 2, \\ u + v = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} u = 3, \\ v = 1. \end{cases}$	

3. Сделайте обратную замену.	$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=3,\\ \sqrt[4]{x-y}=1.\end{cases}$	
4. Решите систему.	$\begin{cases}x+y=81,\\ x-y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=41,\\ y=40.\end{cases}$	
5. Запишите ответ.	*Ответ*: (41; 40).	*Ответ*: (1;81); (81;1).
Типовое задание	*Решите систему*: $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$ *Решение.* *Ответ*: (1;8); (8;1).	

Степень с рациональным показателем

Степень с рациональным показателем	Определение	Пример
	Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$: $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$	$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}$
	Степень числа 0 определена только для положительных показателей и равна нулю: $0^r=0$ для любого $r>0$.	$0^{\frac{5}{6}}=0$
	Рациональная степень отрицательных чисел не определяется.	$(-2)^{\frac{5}{6}}$ не определено
	Для любого положительного a и любого рационального r число a^r — положительно.	$3^{\frac{2}{5}}>0$
	Значение a^r **не зависит от формы** записи рационального числа r.	$3^{\frac{4}{10}}=3^{\frac{2}{5}}=3^{0,4}$

Свойства степеней с рациональным показателем

Действия со степенями	Формула (для любых $a>0$, $b>0$ и любых рациональных p и q)	Пример
Умножение степеней	$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	$x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{4}}=$
Деление степеней	$a^p:a^q=a^{p-q}$	$y^{\frac{1}{3}}:y^{-\frac{2}{5}}=$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q=a^{pq}$	$\left(2^{-\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}}=$

Возведение в степень произведения	$(ab)^p = a^p b^p$	$\left(m^{-\frac{3}{4}} n^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} =$
Возведение в степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{-\frac{9}{2}}}\right)^{-\frac{8}{3}} =$
Степень с отрицательным рациональным показателем	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-\frac{2}{3}} =$
Сравнение степеней с рациональным показателем	Если $0<a<b$, то $a^p < b^p$ при $p>0$, $a^p > b^p$ при $p<0$.	
	Если $p<q$, то $a^p < a^q$ при $a>1$, $a^p > a^q$ при $0<a<1$.	

Замечание. При преобразовании иррациональных выражений переход от корней к степеням может вызвать сужение ОДЗ. Так, в равенстве $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ левая часть определена при $x \in \boldsymbol{R}$, а правая — при $x \geq 0$.

Типовое задание

Представьте: а) *в виде степени*: $\frac{\sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}} \cdot \frac{\sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}}}$;

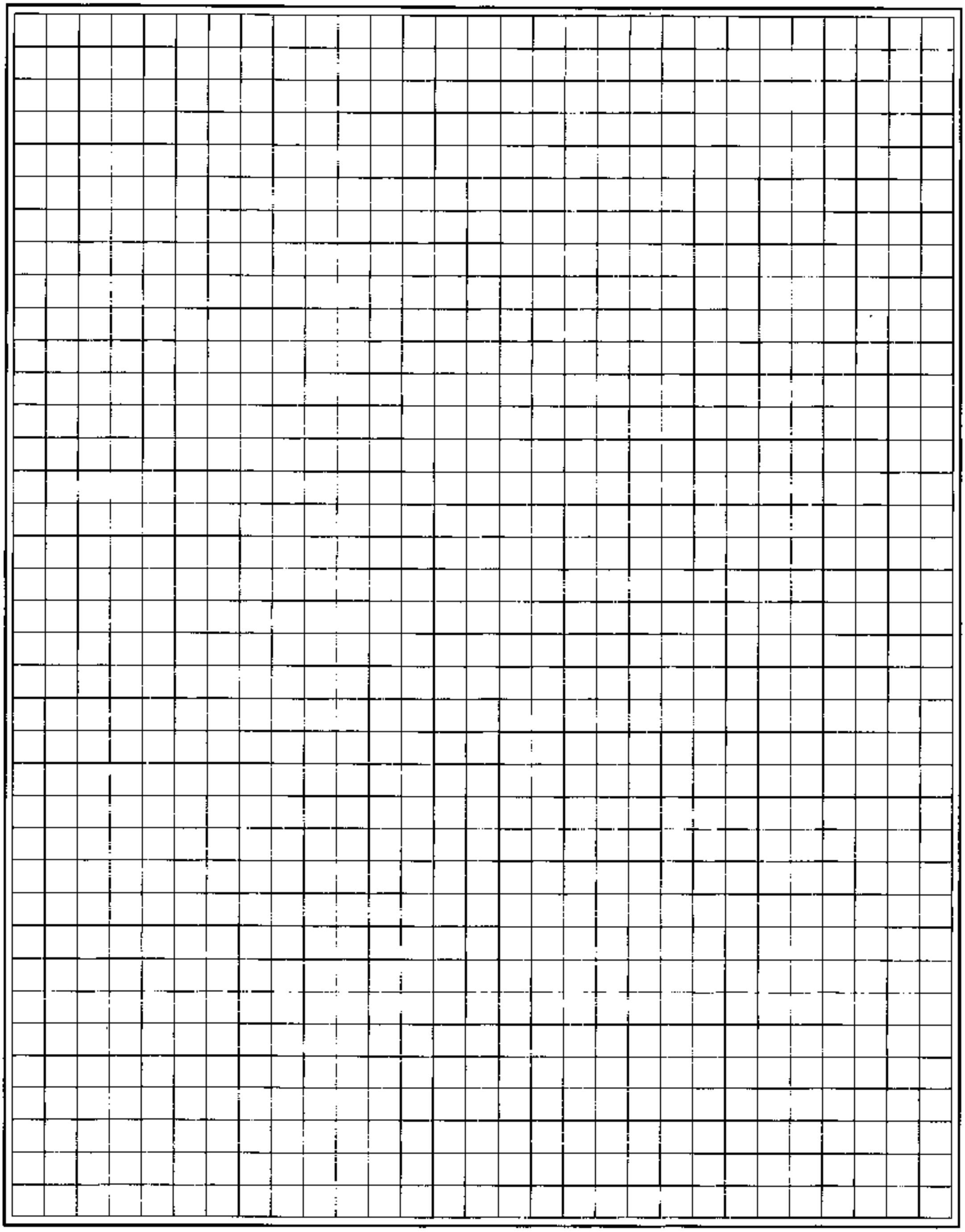
б) *в виде корня*: $\frac{\sqrt[3]{b^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{b^{\frac{2}{3}}}}}{\left(\left(\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{2}{5}}\right)^2} \cdot \sqrt[90]{b^{29}}$.

Решение.

	Ответ: а) $a^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{a}$.
Типовое задание	*Вычислите*: $2\cdot\left(75\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}}-3\cdot\left(9\sqrt{162}\right)^{\frac{1}{3}}+5\cdot\left(72\sqrt{256}\right)^{\frac{1}{6}}-11\cdot\sqrt[6]{18}$. *Решение.* *Ответ*: 0.
Типовое задание	*Упростите выражение*: $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^2-b^2\right)}{\sqrt[3]{ab^3}+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}-\sqrt[3]{a^3b}}$.

	Решение. *Ответ:* $a-b$.
Типовое задание	*Решите уравнение:* $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$. *Решение.* *Ответ:* 3; $\dfrac{81-9\sqrt{97}}{8}$. ***Указание.*** **Разделите уравнение на $(x+1)$ и сделайте замену $t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.**

Дополнительные сведения и задачи по теме



ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

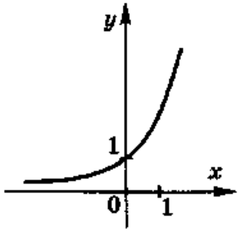
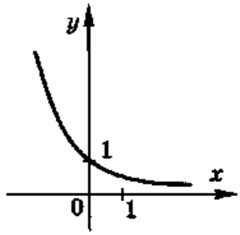
Показательная функция

Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	**Функция, заданная формулой** $y = a^x$ **(**$a>0,\ a\neq 1$**), называется показательной функцией с основанием** a**.** При $a=1$ также существует функция $y=1^x$, но она не является показательной.

	Свойство	**Пример**
Основные свойства степеней[1] **(**$a>0,\ b>0,\ x,\ y \in R$**)**	$a^x a^y = a^{x+y}$	$2^{\sqrt{3}} 2^{-\sqrt{3}} =$
	$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\dfrac{3^{\sqrt{12}}}{3^{2\sqrt{3}}} =$
	$(ab)^x = a^x b^x$	$5^{\pi} \cdot 0{,}2^{\pi} =$
	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	$\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} =$
	$(a^x)^y = a^{xy}$	$\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}} =$

[1] Определение степени с иррациональным показателем см. в учебнике.

Свойства показательной функции

Функция / Свойство	$y = a^x$, $a>1$ 	$y = a^x$, $0<a<1$ 
Область определения	Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел: $D(y) = \boldsymbol{R}$.	
Область значений	Множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных действительных чисел: $E(y) = (0;\ +\infty)$.	
Четность, нечетность	Ни четная, ни нечетная.	
Нули	Нулей нет.	
Промежутки знакопостоянства	$y>0$ для любых $x \in \boldsymbol{R}$.	
Монотонность	Возрастает на $\boldsymbol{R}$.	Убывает на $\boldsymbol{R}$.

Показательные уравнения

Показательное уравнение	**Показательным уравнением называется уравнение, содержащее переменную только в показателе степени.**

Основные виды показательных уравнений

Вид уравнения	Схема решения	Пример
$a^{f(x)} = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	Если $b>0$, то представьте b как a^c, запишите уравнение в виде $a^{f(x)} = a^c$ и решите уравнение $f(x)=c$.	$2^{x^2-x-1} = 0,5$
	Если $b\leq 0$, то уравнение корней не имеет.	$3^{x+5} = -1$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	**Решите уравнение $f(x) = g(x)$.**	$5^{x^2+x} = 5^{x+4}$
$a^{f(x)} = b^{f(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1,$ $b > 0,\ b \neq 1,$ $a \neq b)$	**Разделите обе части уравнения на $b^{f(x)}$: $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{0}$; решите уравнение $f(x) = 0$.**	$2^{\sin x} = 3^{\sin x}$
Основные методы[1] решения показательных уравнений	**<u>Идея решения</u>: сведение данного уравнения к одному или нескольким уравнениям основных видов.** **<u>Методы решения</u>:** • представление обеих частей уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями; • представление обеих частей уравнения в виде степеней с одинаковыми показателями; • замена переменной.	

Схема приведения обеих частей уравнения к виду степеней с одинаковыми основаниями

Этапы решения	Примеры	
	$3^{x^2+3x-1,5} = 9\sqrt{3}$	$2^{x+3} - 2^{x-1} = 30$
1. Представьте обе части уравнения в виде степеней с одинаковым основанием, используя свойства степеней или вынесение общего множителя за скобки.	$3^{x^2+3x-1,5} = 3^{2,5}$.	

[1] Более сложные методы решения показательных уравнений см. в приложении.

2. Решите уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.	$x^2 + 3x - 1,5 = 2,5;$ $x^2 + 3x - 4 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1. \end{array}\right.$	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: –4; 1.	*Ответ*: 2.

Схема приведения обеих частей уравнения к виду степеней с одинаковыми показателями

Этапы решения	Примеры	
	$7^{1-0,5x} = 2^{3-1,5x}$	$0,2^{2x-3} = 0,09^{x-1,5}$
1. Представьте обе части уравнения в виде степеней с одинаковым показателем.	$7^{1-0,5x} = 2^{3(1-0,5x)}$; $7^{1-0,5x} = 8^{1-0,5x}$; $7^{1-0,5x} = 8^{1-0,5x}$.	
2. Решите уравнение вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$.	$\left(\frac{7}{8}\right)^{1-0,5x} = 1$; $\left(\frac{7}{8}\right)^{1-0,5x} = \left(\frac{7}{8}\right)^0$; $1 - 0,5x = 0$; $x = 2$.	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: 2.	*Ответ*: 1,5.

Метод замены переменной в показательных уравнениях

Этапы решения	Примеры	
	$4^{x+2} - 31 \cdot 2^{x+1} - 8 = 0$	$9^{x+2} - 26 \cdot 3^{x+1} - 3 = 0$
1. Избавьтесь от числовых слагаемых в показателях степеней (если они есть и не совпадают).	$4^x \cdot 4^2 - 31 \cdot 2^x \cdot 2 - 8 = 0;$ $16 \cdot 4^x - 62 \cdot 2^x - 8 = 0;$	

2. Приведите все степени к одному основанию.	$16\cdot 2^{2x}-62\cdot 2^{x}-8=0.$	
3. Сделайте замену переменной.	Замена: $y=2^{x}$. $16y^{2}-62y-8=0;$	
4. Решите полученное уравнение.	$8y^{2}-31y-4=0;$ $\left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=-\dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$	
5. Сделайте обратную замену и решите уравнения вида $a^{f(x)}=b$.	$\left[\begin{array}{l} 2^{x}=4, \\ 2^{x}=-\dfrac{1}{8}-\textit{корней нет}; \end{array}\right.$ $x=2$.	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: 2.	*Ответ*: 0.
Типовое задание	*Решите уравнение*: *а*) $2^{x+3}-3^{x}=3^{x+1}-2^{x}$; *б*) $2^{x}-2^{1-x}=1$. ***Решение.***	

Ответ: *а*) 2; *б*) 1.

Показательные неравенства

Показательное неравенство	**Показательным неравенством** называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.
Решение показательных неравенств основных видов $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	**Решение показательных неравенств** основано на свойстве монотонности показательной функции: знак между степенями с основанием a и показателями этих степеней • **сохраняется**, если $a > 1$; • **меняется**, если $0 < a < 1$. $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ если $a>1$, то $f(x)>g(x)$ | если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$

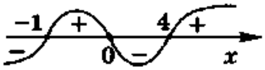
Таблица решений показательных неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)}$

Вид неравенства	**Равносильное неравенство**	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$
$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$	$f(x) \ge g(x)$	$f(x) \le g(x)$
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	$f(x) \le g(x)$	$f(x) \ge g(x)$

Основные методы решения показательных неравенств

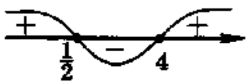
Основные методы[1] решения показательных неравенств	<u>**Идея решения**</u>: сведение данного неравенства к одному или нескольким неравенствам основных видов. <u>**Методы решения:**</u> • представление обеих частей неравенства в виде степеней с одинаковыми основаниями; • замена переменной.

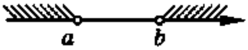
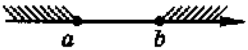
[1] Более сложные методы решения показательных неравенств см. в приложении.

Схема приведения обеих частей неравенства к виду степеней с одинаковыми основаниями		
Этапы решения	**Примеры**	
	$0,5^{\frac{x^2-4}{x}} \ge 0,125$	$2^{x+2} - 2^{x} > 3$
1. Представьте обе части неравенства в виде степеней с одинаковым основанием.	$0,5^{\frac{x^2-4}{x}} \ge 0,5^3$.	
2. Учитывая монотонность соответствующей показательной функции, решите полученное показательное неравенство.	**Так как показательная функция с основанием 0,5 убывающая, то:** $\frac{x^2-4}{x} \le 3$; $\frac{x^2-3x-4}{x} \le 0$.	
3. Решите полученное неравенство.	$\frac{(x-4)(x+1)}{x} \le 0$; $\begin{cases}(x-4)(x+1)x \le 0,\\ x \ne 0.\end{cases}$  $\left[\begin{array}{l}x \le -1,\\ 0 < x \le 4.\end{array}\right.$	
4. Запишите ответ.	***Ответ***: $(-\infty;-1] \cup (0;4]$.	***Ответ***: $(0;+\infty)$.
Типовое задание	***Решите неравенство:*** *а)* $(0,4)^{2-x} \le (2,5)^{1-\frac{2}{x}}$; *б)* $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\cos x} > \sqrt{\frac{\pi}{3}}$. ***Решение.***	

	Ответ: *а*) $(0;1]\cup[2;+\infty)$; *б*) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z.$

Метод замены переменной в показательных неравенствах

Этапы решения	Примеры	
	$2^{4x+1}-9\cdot 4^x+4\le 0$	$0,5^{4x-2}-9\cdot(0,25)^x+2\ge 0$
1. Избавьтесь от числовых слагаемых в показателях степеней (если они есть).	$2\cdot 2^{4x}-9\cdot 4^x+4\le 0.$	
2. Приведите все степени к одному основанию.	$2\cdot 2^{4x}-9\cdot 2^{2x}+4\le 0.$	
3. Сделайте замену переменной.	Замена: $y=2^{2x}$.	
4. Решите полученное рациональное неравенство.	$2y^2-9y+4\le 0$; $2\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-4)\le 0$;  $\frac{1}{2}\le y\le 4$.	

5. Сделайте обратную замену и решите показательные неравенства.	$2^{-1} \le 2^{2x} \le 2^{2}$, так как показательная функция с основанием 2 возрастающая, то $-1 \le 2x \le 2;$ $-0{,}5 \le x \le 1$.	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: $[-0{,}5;\ 1]$.	*Ответ*: $(-\infty;\ -0{,}5] \cup [1;\ +\infty)$.
Переход от решения квадратичного неравенства к системе или совокупности линейных неравенств	**Числовые промежутки**	**Система (совокупность) неравенств**
	 $t \in (a; b)$	$\begin{cases} t > a, \\ t < b \end{cases}$ или $a < t < b$
	 $t \in [a; b]$	$\begin{cases} t \ge a, \\ t \le b \end{cases}$ или $a \le t \le b$
	 $t \in (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$	$\left[\begin{array}{l} t < a, \\ t > b \end{array}\right.$
	 $t \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$	$\left[\begin{array}{l} t \le a, \\ t \ge b \end{array}\right.$
Типовое задание	*Решите неравенство*: *а*) $9^{x+1} - 244 \cdot 3^{x} + 27 \le 0$; *б*) $2^{x} < 1 + 2^{1-x}$. ***Решение.***	

	Ответ: *а*) $[-2;3]$; *б*) $(-\infty;1)$.

Системы показательных уравнений

Решение систем показательных уравнений	При решении систем, содержащих показательные уравнения, применяются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений: подстановки, сложения, умножения и т.д., но с учетом особенностей решения показательных уравнений.

Схема решения на примере	Пример
$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54 \end{cases}$	$\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$
1. Перепишем систему в виде, удобном для умножения и деления уравнений: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3, \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^3. \end{cases}$	
2. Заменим первое уравнение произведением, а второе — частным уравнений исходной системы: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3, \\ \dfrac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \dfrac{2^3 \cdot 3}{2 \cdot 3^3}. \end{cases}$	

3. Решим полученные показательные уравнения:

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^4 \cdot 3^4, \\ \dfrac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \dfrac{2^2}{3^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6^{x+y} = 6^4, \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

4. Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (3; 1).

Ответ: (3;2).

Типовое задание

Решите систему:

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{0,5x} - 2^y = 7. \end{cases}$$

Решение.

Ответ: $(4;\ 1)$.

Указание. Сделайте замену $u = 3^{0,5x}$, $v = 2^{y}$.

Логарифмы и их свойства

Логарифм	Определение	Пример
$\log_a b = x$, если $a^x = b$ $(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$	**Логарифмом** числа b по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. ***Обозначение.*** $\log_a b$. Операцию вычисления логарифма часто называют логарифмированием, а обратную — **потенцированием.**	$\log_2 64 =$ $\log_3 \frac{1}{27} =$ $\log_{0,5} 8 =$ $\log_{\sqrt{5}} 125 =$ $\log_4 32 =$
Десятичный логарифм	**Десятичным логарифмом** числа b называется логарифм числа b по основанию 10. ***Обозначение.*** $\lg b$.	$\lg 0,0001 =$
	Замечание. Позже будет введен логарифм по основанию e ($e \approx 2,72$), который называется **натуральным логарифмом** и обозначается символом $\ln$.	
Основное логарифмическое тождество	$a^{\log_a b} = b$ $(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$	$7^{\log_7 9} =$

Свойства логарифмов $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1,\ x > 0,\ y > 0, p \in R)$			
Свойство	**Формула**	**Доказательство**	**Пример**
Логарифм единицы	$\log_a 1 = 0$		$\log_{\pi} 1 =$
Логарифм, равный единице	$\log_a a = 1$		$\log_{0{,}5} \frac{1}{2} =$
Логарифм произведения	$\log_a xy =$ $= \log_a x + \log_a y$ **логарифм произведения равен сумме логарифмов**		$\log_6 \sqrt{12} + \log_6 \sqrt{3} =$
Логарифм частного	$\log_a \frac{x}{y} =$ $= \log_a x - \log_a y$ **логарифм частного равен разности логарифмов**		$\log_3 6 - \log_3 2 =$
Логарифм степени	$\log_a x^p = p \log_a x$		$\log_5 5^8 =$

Формула перехода к другому основанию	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(b \neq 1)$		$\dfrac{\lg 81}{\lg 3} =$

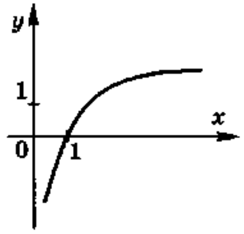
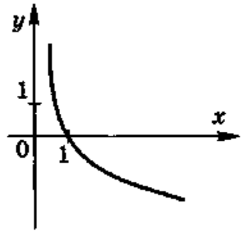
Типовое задание	*Прологарифмируйте по основанию* 10: *а*) $1000a^3b^{\frac{1}{3}}c^{-4}$; *б*) $\dfrac{100x^4y^{-5}}{c^{\frac{4}{5}}d^7}$. *Решение.*
Типовое задание	*Вычислите*: *а*) $\lg 16 + \lg 625$; *б*) $\log_{0,3} 27 - 3\log_{0,3} 10$; *в*) $\dfrac{\log_3 216}{\log_8 3} - \dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$. *Решение.* *Ответ*: *в*) -2.
Полезное задание	*Докажите логарифмические формулы общего вида* ($a > 0, a \neq 1$): *а*) *логарифм корня*: $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}\log_a x \quad (x > 0, n \in N, n \neq 1)$; *б*) *логарифм степени*: $\log_{a^q} x^p = \dfrac{p}{q}\log_a x \quad (x > 0, p, q \in \boldsymbol{R}, q \neq 0)$;

	в) логарифм четной степени: $\log_a x^{2n} = 2n\log_a \lvert x\rvert$ $(x \neq 0, n \in \mathbf{Z})$; *г) логарифм произведения:* $\log_a xy = \log_a \lvert x\rvert + \log_a \lvert y\rvert$ $(xy > 0)$; *д) логарифм частного:* $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a \lvert x\rvert - \log_a \lvert y\rvert$ $\left(\dfrac{x}{y} > 0\right)$.
Полезное задание	*Докажите тождество:* $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, *где* $a>0$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$.

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция	Функция, заданная формулой $y = \log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, называется **логарифмической функцией** с основанием a.

Свойства логарифмической функции

Функция / **Свойства**	$y = \log_a x,\ a>1$	$y = \log_a x,\ 0<a<1$
		
Область определения	Множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных действительных чисел: $D(y) = (0;\ +\infty)$.	
Область значений	Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел: $E(y) = \boldsymbol{R}$.	
Четность, нечетность	Ни четная, ни нечетная.	
Нули	$y = 0$ при $x = 1$	
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x > 1$, $y < 0$ при $0 < x < 1$.	$y > 0$ при $0 < x < 1$, $y < 0$ при $x > 1$.
Монотонность	Возрастает на $(0;\ +\infty)$.	Убывает на $(0;\ +\infty)$.
	Замечание. Графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y = x$.	

Типовое задание	***Найдите область определения функции*** $y=\log_{12}x\left(x^2-x-2\right)$. ***Решение.*** ***Ответ***: $(-1;0)\cup(2;+\infty)$.
Типовое задание	***Сравните числа:*** *а)* $\log_2\pi$ *и* $\log_2 3{,}14$; *б)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}0{,}8$ *и* $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2}{3}$. ***Решение.***

Логарифмические уравнения

Логарифмическое уравнение	**Определение**	**Пример**
	Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или (и) в основании логарифма.	$\log_{\frac{1}{3}}x=-2$

Простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$	**Простейшим логарифмическим уравнением** называется уравнение вида $$\log_a x = b,$$ где $a > 0, a \neq 1$. Простейшее логарифмическое уравнение имеет единственный корень $$x = a^b.$$	$\log_{16} x = 0,25$
$\log_x A = B$ $(A > 0)$	***Замечание.*** Простейшим логарифмическим уравнением также можно назвать уравнение вида $\log_x A = B$, где $A > 0$. Оно сводится к системе: $$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^B = A. \end{cases}$$	$\log_x 49 = 2$ $\log_x 1 = 2$
Общее решение показательного уравнения $a^x = b$ **с помощью логарифма**	Уравнение $a^x = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ имеет корень $x = \log_a b$.	$2^x = 17$

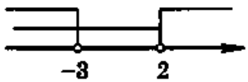
Основные виды логарифмических уравнений

Вид уравнения	ОДЗ и уравнение-следствие	Равносильная система (или уравнение)
$\log_a f(x) = b$ $(a > 0, a \neq 1)$	ОДЗ: $f(x) > 0$ Уравнение-следствие: $f(x) = a^b$	$f(x) = a^b$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$	ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ Уравнение-следствие: $f(x) = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \text{ (или } g(x) > 0\text{)}. \end{cases}$

Замечание. В записях вида $f(x) > 0$ (или $g(x) > 0$) из двух неравенств выбирают то, которое легче решить.

Основные методы[1] решения логарифмических уравнений	<u>**Идея решения**</u>: сведение данного уравнения к одному или нескольким уравнениям основных видов. <u>**Методы решения**</u>: • переход к уравнению-следствию; • переход к равносильной системе; • замена переменной.
Особенности решения логарифмических уравнений	• Решение логарифмического уравнения с помощью уравнений-следствий состоит из следующих этапов: 1. Найти ОДЗ. 2. Решить уравнение-следствие. 3. Проверить корни подстановкой либо в ОДЗ, либо в данное уравнение. • Равносильные системы, как правило, содержат оптимальный набор неравенств, отсеивающих посторонние корни уравнения. • Уравнения вида $\log_a f(x)-\log_a g(x)=b$, $\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a h(x)$ иногда полезно переписать в виде $\log_a f(x)=\log_a g(x)+b$, $\log_a f(x)=\log_a g(x)+\log_a h(x)$, чтобы вместо формулы разности логарифмов, приводящей к дробному выражению, применять более удобную формулу суммы логарифмов.

Схемы решения основных видов логарифмических уравнений на примерах

1-ый способ (с помощью уравнения-следствия)	**Примеры**	
	$\lg(2-x)=\lg(x^2+x-6)$	$\lg(x^2-5x+6)=\lg(2x-6)$
1. Найдите ОДЗ уравнения.	$\begin{cases}2-x>0,\\ x^2+x-6>0;\end{cases}$  $\begin{cases}x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>2;\end{array}\right.\end{cases}$  $x<-3.$	

[1] Более сложные методы решения и виды логарифмических уравнений см. в приложении.

2. Решите уравнение-следствие и выберите те его корни, которые входят в ОДЗ.	$2-x=x^2+x-6,$ $x^2+2x-8=0,$ $\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=2\notin \text{ОДЗ}.\end{array}\right.$	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: -4.	*Ответ*: 4.
2-ой способ (с помощью равносильной системы)	$2\lg(-x)=\lg(x+6)$	$2\lg\sqrt{-4x}=\lg(x^2-2x-3)$
1. Запишите систему, равносильную данному уравнению.	$\begin{cases}\lg(-x)^2=\lg(x+6),\\ -x>0.\end{cases}$	
2. Решите систему.	$\begin{cases}(-x)^2=x+6,\\ -x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x-6=0,\\ x<0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x<0;\end{cases}\qquad x=-2.$	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: -2.	*Ответ*: -3.

Типовое задание	*Решите уравнение*: *а*) $\log_7(4x-x^2+2)=\log_7(x^2-5x+6)$; *б*) $\lg(4^x-1)=\lg(3\cdot 2^x-3)$.

	Решение. *Ответ* : *а*) 0,5; 4; *б*) 1.
Изменение ОДЗ логарифмического уравнения в процессе решения	• **При применении логарифмических тождеств ОДЗ уравнения может как расшириться (появятся посторонние корни), так и сузиться (потеряются корни).** • **Операция расширения ОДЗ безопасна**, так как посторонние корни можно отсеять проверкой. • **Операция сужения ОДЗ недопустима**, так как потерянные корни можно не восстановить! В этом случае могут помочь формулы общего вида. • Наиболее безопасный путь решения — **равносильные переходы** на каждом шаге решения. Применяя основные свойства логарифмов, полезно руководствоваться следующей таблицей.

Формула	ОДЗ		Формула общего вида
$(a>0,\ a\neq 1)$	левой части	правой части	
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ОДЗ сужается → ← ОДЗ расширяется	$\begin{cases}x>0,\\ y>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0,\\ y<0\end{cases}$	$\begin{cases}x>0,\\ y>0\end{cases}$	$\log_a xy = \log_a \lvert x\rvert + \log_a \lvert y\rvert$ ОДЗ расширяется →
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ОДЗ сужается → ← ОДЗ расширяется	$\begin{cases}x>0,\\ y>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0,\\ y<0\end{cases}$	$\begin{cases}x>0,\\ y>0\end{cases}$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a \lvert x\rvert - \log_a \lvert y\rvert$ ОДЗ расширяется →
$\log_a x^p = p\log_a x$ ОДЗ может сузиться → ← ОДЗ может расшириться	$x^p>0$	$x>0$	$\log_a x^p = p\log_a \lvert x\rvert$ ОДЗ может расшириться →

Схема преобразования логарифмического уравнения на ОДЗ

Этапы решения	Примеры	
	$\log_2(2x-1)+\log_2(x+1)=$ $=\log_2(4x+8)$	$\log_2(3x-1)+\log_2(x+1)=$ $=\log_2(3x+9)$
1. Найдите ОДЗ (этот шаг можно пропустить, если корни проверяются подстановкой в уравнение).	ОДЗ: $\begin{cases}2x-1>0,\\ x+1>0,\\ 4x+8>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,5,\\ x>-1,\\ x>-2;\end{cases}$ $x>0,5.$	
2. Приведите уравнение к одному из основных видов, применяя логарифмические тождества.	$\log_2((2x-1)(x+1))=$ $=\log_2(4x+8).$	

3. Решите полученное уравнение и выберите те его корни, которые входят в ОДЗ (или выполните проверку подстановкой в исходное уравнение).	$(2x-1)(x+1)=4x+8$; $2x^2-3x-9=0$; $\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1{,}5 \notin \text{ ОДЗ.} \end{array}\right.$	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: 3.	*Ответ*: 2.
Типовое задание	*Решите уравнение*: *а*) $\log_2(x-2)+\log_2(3x-1)=3$; *б*) $\lg(x-2)=1-\lg(x+1)$. *Решение.* *Ответ*: *а*) 3; *б*) 4.	

Метод замены переменной в логарифмических уравнениях		
Этапы решения	**Примеры**	
	$\log_2^2 x - \log_{\sqrt{2}} x - 3 = 0$	$\log_{0,5}^2 x - \log_2 x - 2 = 0$
1. Найдите ОДЗ[1].	ОДЗ: $x > 0$.	
2. Приведите все логарифмы к одному основанию.	$\log_2^2 x - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} - 3 = 0;$ $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$	
3. Сделайте замену переменной.	Замена: $y = \log_2 x$.	
4. Решите полученное уравнение.	$y^2 - 2y - 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} y = -1, \\ y = 3. \end{array}\right.$	
5. Сделайте обратную замену и решите простейшие логарифмические уравнения.	$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1, \\ \log_2 x = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = 8. \end{array}\right.$	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: $\dfrac{1}{2}$; 8.	*Ответ*: $\dfrac{1}{2}$; 4.

[1] При решении уравнений такого вида нахождение ОДЗ не является обязательным.

Типовое задание	*Решите уравнение:* *а)* $\log_3^2 x + \log_3 x - 6 = 0$; *б)* $\log_5 x - 2\log_x 5 = 1$. *Решение.* *Ответ*: *а)* $\frac{1}{27}$; 9; *б)* 0,2; 25.

Логарифмические неравенства

Логарифмическое неравенство	**Логарифмическим неравенством** называется неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма или (и) в основании логарифма.
Решение логарифмических неравенств основных видов $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$	**Решение логарифмических неравенств** основано на **свойстве монотонности** логарифмической функции: знак между логарифмами с основанием a и выражениями, стоящими под знаками логарифмов, • **сохраняется**, если $a > 1$; • **меняется**, если $0 < a < 1$.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \arrow[dl, "a>1"'] \arrow[dr, "0<a<1"] & \\ \boxed{\begin{array}{c} f(x)>g(x) \\ +\text{ ОДЗ или система} \end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c} f(x)<g(x) \\ +\text{ ОДЗ или система} \end{array}} \end{tikzcd}$$

Таблица решений логарифмических неравенств вида
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$

Вид неравенства и ОДЗ ($a > 0, a \ne 1$)	Решение с учетом ОДЗ		Равносильная система	
	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$f(x) < g(x)$ + ОДЗ	$f(x) > g(x)$ + ОДЗ	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$f(x) \le g(x)$ + ОДЗ	$f(x) \ge g(x)$ + ОДЗ	$\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Замечание. Для удобства решения неравенства вида $\log_a f(x) > b$ (и аналогичные им) удобно записывать в виде $\log_a f(x) > \log_a a^b$.

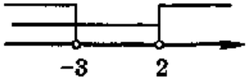
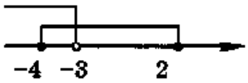
Основные методы решения логарифмических неравенств

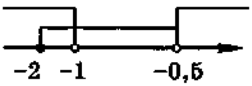
Основные методы[1] решения логарифмических неравенств	<u>**Идея решения:**</u> сведение данного неравенства к одному или нескольким неравенствам основных видов. <u>**Методы решения:**</u> • преобразование с учетом ОДЗ; • переход к равносильной системе; • замена переменной.

Схема решения основных видов логарифмических неравенств на примерах

1-ый способ (с учетом ОДЗ)	Примеры	
	$\lg(2-x) \ge \lg(x^2+x-6)$	$\log_{\sin 1}(x^2-5x+6) \le \log_{\sin 1}(2x-6)$
1. Найдите ОДЗ.	$\begin{cases} 2-x>0, \\ x^2+x-6>0; \end{cases}$ 	

[1] Более сложные методы решения логарифмических неравенств см. в приложении.

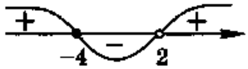
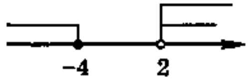
	$\begin{cases} x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 2; \end{array}\right. \end{cases}$  $x < -3.$	
2. Избавьтесь от знака логарифма в неравенстве, учитывая характер монотонности логарифмической функции.	**Так как логарифмическая функция с основанием 10 возрастающая, то:** $2 - x \geq x^2 + x - 6$.	
3. Решите полученное неравенство.	$x^2 + 2x - 8 \leq 0;$ $-4 \leq x \leq 2.$	
4. Найдите пересечение полученного решения и ОДЗ исходного неравенства.	$\begin{cases} x < -3, \\ -4 \leq x \leq 2; \end{cases}$  $-4 \leq x < -3$.	
5. Запишите ответ.	***Ответ:*** $[-4;\ -3)$.	***Ответ:*** $[4;\ +\infty)$.
2-ой способ (с помощью перехода к равносильной системе)	$\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x+1}{2x+1} \geq 1$	$\log_3\left(x^2 + 2x + 1\right) \leq 0$
1. Перепишите неравенство в виде $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ (на этом шаге решения ОДЗ неравенства не должно изменяться).	**Перепишем неравенство в виде:** $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x+1}{2x+1} \geq \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$.	

2. Запишите систему, равносильную данному неравенству, учитывая характер монотонности логарифмической функции.	Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ убывающая, то неравенство равносильно системе: $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2x+1}\le\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{x+1}{2x+1}>0.\end{cases}$	
3. Решите систему.	$\begin{cases}\dfrac{3x+3-2x-1}{3(2x+1)}\le 0,\\ \dfrac{x+1}{2x+1}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x+2}{2x+1}\le 0,\\ \dfrac{x+1}{2x+1}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+2)(2x+1)\le 0,\\ x\ne -0,5,\\ (x+1)(2x+1)>0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2\le x<-0,5,\\ \left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>-0,5;\end{array}\right.\end{cases}$  $-2\le x<-1.$	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: $[-2;\ -1)$.	*Ответ*: $[-2;\ -1)\cup(-1;\ 0]$.
Типовое задание	*Решите неравенство*: *а*) $\log_2\left(x^2-x\right)\le 1$; *б*) $\log_{0,3}\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,3}(10-2x)$. ***Решение.***	

Ответ: *а*) $[-1;\ 0)\cup(1;\ 2]$; *б*) $[-4;\ -1)\cup(2;\ 3]$.

Схема применения логарифмических тождеств при решении неравенств

Этапы решения	Примеры	
	$\log_{0,6}(x+1)-\log_{0,5}(x-2)\le 1$	$\log_{0,7} x+\log_{0,7}(x+1)\ge\log_{0,7}(8-x)$
1. Найдите ОДЗ.	ОДЗ: $\begin{cases}x+1>0,\\x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1,\\x>2;\end{cases}$ $x>2$.	

2. Приведите неравенство к одному из основных видов, применяя логарифмические тождества.	$\log_{0,5}\dfrac{x+1}{x-2}\le\log_{0,5}\dfrac{1}{2}$.	
3. Решите полученное неравенство.	**Так как логарифмическая функция с основанием 0,5 убывающая, то:** $\dfrac{x+1}{x-2}\ge\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2x+2-x+2}{2(x-2)}\ge 0$; $\dfrac{x+4}{x-2}\ge 0$;  $\left[\begin{array}{l} x\le -4, \\ x>2. \end{array}\right.$	
4. Найдите пересечение полученного решения и ОДЗ исходного неравенства.	$\begin{cases} x>2, \\ \left[\begin{array}{l} x\le -4, \\ x>2. \end{array}\right. \end{cases}$  $x\in[2;\ +\infty)$.	
5. Запишите ответ.	***Ответ***: $[2;\ +\infty)$.	***Ответ***: $(0;\ 2]$.
Типовое задание	***Решите неравенство***: $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x<6-\log_{\frac{1}{3}} x$. ***Решение.***	

	Ответ: (0; 27)

Метод замены переменных в логарифмических неравенствах

Этапы решения	Примеры	
	$\log_2^2 x - \log_{\sqrt{2}} x - 3 \ge 0$	$\log_{0,5}^2(x+1) + \log_{0,5}(x+1) - 2 \ge 0$
1. Найдите ОДЗ[1].	ОДЗ: $x > 0$.	
2. Приведите все логарифмы, входящие в неравенство, к одному основанию.	$\log_2^2 x - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} - 3 \ge 0;$ $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 \ge 0.$	
3. Сделайте замену переменной.	Замена: $y = \log_2 x$.	
4. Решите полученное рациональное неравенство.	$y^2 - 2y - 3 \ge 0$; $\left[\begin{array}{l} y \le -1, \\ y \ge 3. \end{array}\right.$	

[1] При решениии неравенств такого вида нахождение ОДЗ не является обязательным. при этом учет ОДЗ обязателен в решении простейших логарифмических неравенств, полученных из данного.

5. Сделайте обратную замену и решите простейшие логарифмические неравенства.	$\left[\begin{array}{l}\log_2 x \le -1,\\ \log_2 x \ge 3;\end{array}\right.$ Так как логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая, то (с учетом ОДЗ): $\left[\begin{array}{l}0 < x \le \frac{1}{2},\\ x \ge 8.\end{array}\right.$ $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right] \cup [8;\ +\infty)$.	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right] \cup [8;\ +\infty)$.	*Ответ*: $\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [3;\ +\infty)$.
Типовое задание	*Решите неравенство* $\log_2^2(x-1) - \log_2(x-1) - 2 \le 0$. *Решение.* *Ответ*: $[1,5;\ 5]$.	

Метод интервалов в логарифмических неравенствах

Решение логарифмических неравенств методом интервалов	**<u>Идея решения</u>: в некоторых логарифмических неравенствах, содержащих переменную, не стоящую под знаком логарифма, наиболее удобно использовать общий метод интервалов. При этом особое внимание следует уделить нахождению ОДЗ исходного неравенства.**
Типовое задание	***Используя метод интервалов, решите неравенство*** $(3x-6)\log_{0,5} x > 0$. ***Решение.*** ***Ответ***: (1;2).

Системы логарифмических уравнений

Решение систем логарифмических уравнений	**При решении систем, содержащих логарифмические уравнения, применяются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений: подстановки, сложения, умножения и т.д., но с учетом особенностей решения логарифмических уравнений.**

Схема решения на примере	**Пример**
$\begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=2, \\ \log_2 x+\log_2 y=\log_2 3+4 \end{cases}$	$\begin{cases} \log_x y-\log_y x=1,5, \\ \dfrac{y}{x}=2 \end{cases}$
1. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$	

2. Перепишем второе уравнение системы в виде, удобном для потенцирования:

$$\begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=2, \\ \log_2 xy=\log_2 48. \end{cases}$$

3. Пропотенцируем оба уравнения:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ xy=48. \end{cases}$$

4. Решим полученную рациональную систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ 2xy=96; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=196, \\ xy=48; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2=196, \\ xy=48; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=14, \\ xy=48; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-14, \\ xy=48; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=8, \\ y=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x=6, \\ y=8; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-8 \notin \text{ОДЗ}, \\ y=-6 \notin \text{ОДЗ}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \notin \text{ОДЗ}, \\ y=-8 \notin \text{ОДЗ}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (8; 6), (6; 8).

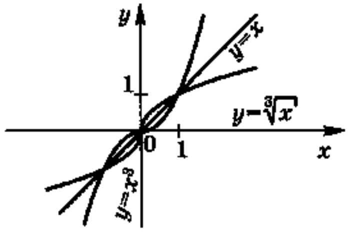
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\frac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)$, $(2;4)$.

Типовое задание	*Решите систему*: $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32, \\ \log_3(x+y)+\log_3(x-y)=1. \end{cases}$ **Решение.**

	Ответ: (2; 1).

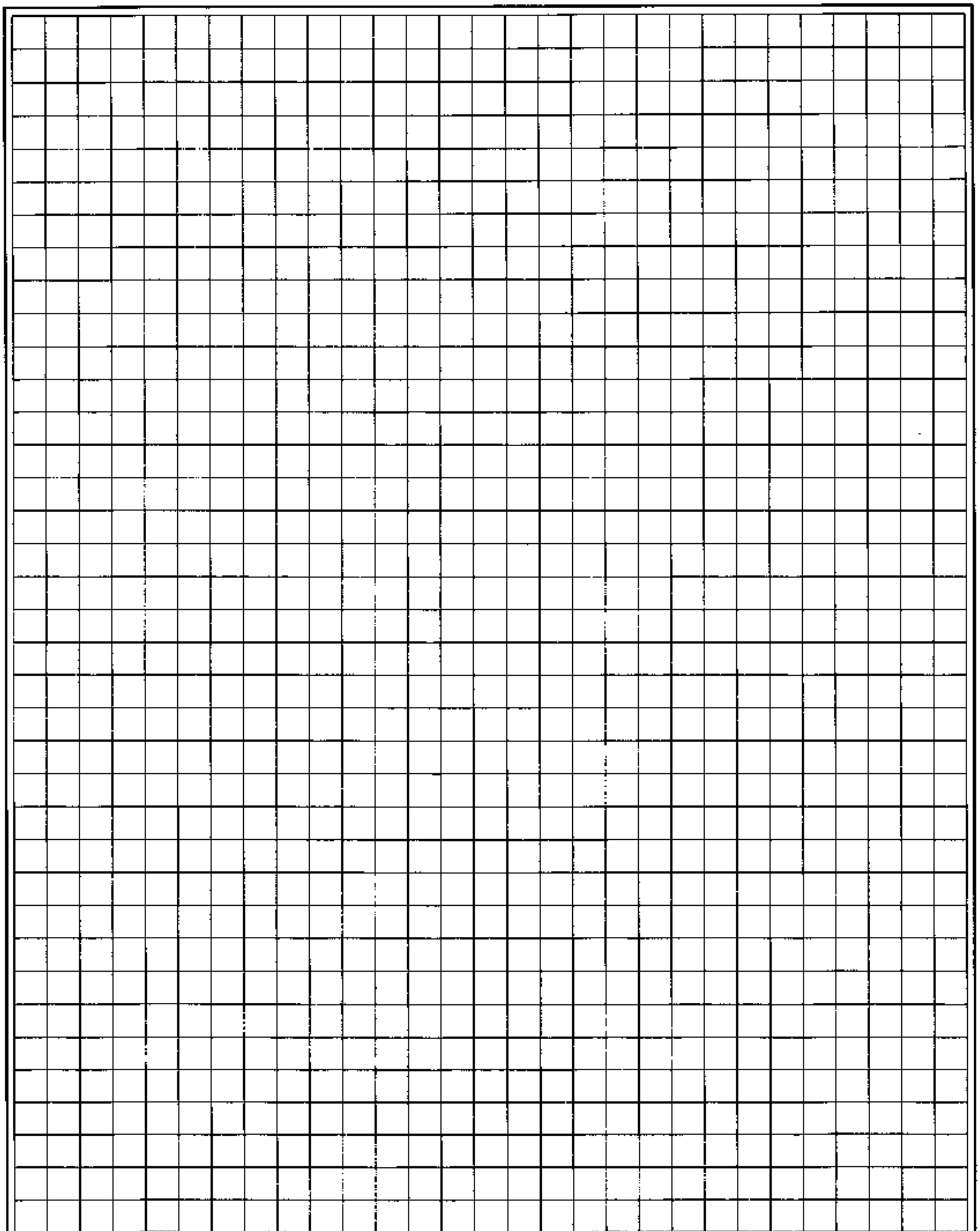
Понятие об обратной функции

	Определения и свойства	Примеры
Обратимая функция	**Обратимой функцией** называется функция, принимающая каждое свое значение в единственной точке области определения.	Функция $y = x^3$ обратима на R.
	Если функция $f(x)$ обратима, а число a принадлежит области значений $E(f)$, то уравнение $f(x) = a$ имеет решение, и только одно.	$x^3 = 1$ $x = 1$ — единственный корень
Обратная функция	Если функция g в каждой точке x области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что $f(y) = x$, то говорят, что функция g — **обратная к функции f.**	Функция $g(x) = \sqrt[3]{x}$ – обратная к функции $f(x) = x^3$.

<table>
<tr>
<td>Свойство графиков взаимно обратных функций</td>
<td>Графики функции f и обратной к ней функции g симметричны относительно прямой $y=x$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td><u>Теорема</u>
(об обратной функции)</td>
<td colspan="2">Если функция f возрастает (убывает) на промежутке I, то она обратима. Обратная к f функция g, определенная в области значений f, также является возрастающей (соответственно убывающей).
Доказательство.</td>
</tr>
</table>

Вывод формулы обратной функции	Правило	Пример
	Чтобы найти формулу функции, обратной к обратимой на промежутке I функции f, надо: • из равенства $y = f(x)$ выразить x через y; • в полученной формуле поменять x и y местами.	Найдем функцию, обратную к $y = 2x - 8$. Данная функция обратима на R. Выразим x через y: $x = \dfrac{y+8}{2} = \dfrac{1}{2}y + 4$. Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию через y: $y = \dfrac{1}{2}x + 4$. Функции $y = 2x - 8$ и $y = \dfrac{1}{2}x + 4$ взаимно обратные.
Типовое задание	*Выведите формулу функции g, обратной к данной функции:* *а)* $y = 4x + 1$; *б)* $y = x^2 - 4$ *при* $x \in [0;\ +\infty)$. *Решение.* *Ответ*: *а)* $y = 0{,}25x - 0{,}25$; *б)* $y = \sqrt{x+4}$.	

Дополнительные сведения и задачи по теме



ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Производная показательной функции. Число e

Число e $e \approx 2{,}72$	**Существует такое число, большее 2 и меньшее 3 (это число обозначают буквой e), что показательная функция $y = e^x$ в точке 0 имеет производную, равную 1, т. е.** $$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0.$$ Число e[1] иррационально и записывается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби: $$e \approx 2{,}7182818284\ldots .$$ **Функция $y = e^x$ называется экспонентой.**

	Определение или свойство	**Доказательство или пример**
Производная показательной функции e^x $\left(e^x\right)' = e^x$	**Функция e^x дифференцируема в каждой точке области определения, и** $$\left(e^x\right)' = e^x.$$	
Натуральный логарифм $\ln x = \log_e x$	**Натуральным логарифмом** (обозначается ln) называется логарифм по основанию e: $$\ln x = \log_e x .$$ Запись произвольного положительного числа a в виде степени с основанием e: $$a = e^{\ln a}$$ $$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$	$\ln e =$ $\ln 1 =$ $\ln \frac{1}{e} =$ $e^{\ln 8} =$ $e^{3\ln 2} =$
Производная показательной функции a^x $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	**Показательная функция a^x дифференцируема в каждой точке области определения, и** $$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$	

[1] Можно показать, что $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ — второй замечательный предел.

	Следствие. Показательная функция непрерывна в каждой точке своей области определения, т. е. $a^x \to a^{x_0}$ при $x \to x_0$.	
Первообразная показательной функции	**Первообразной для показательной функции a^x на R является функция $\dfrac{a^x}{\ln a} + C$.** **В частности, $e^x + C$ есть первообразная для e^x на R.**	
Типовое задание	*Найдите производную функции:* *а)* $f(x) = e^x\left(x^4 - 2x\right)$; *б)* $f(x) = \dfrac{5^x - 2^x}{4^{2x}}$. *Решение.*	
Типовое задание	*Исследуйте на возрастание (убывание) и найдите точки экстремума функции* $f(x) = x^2 e^{-x}$. *Решение.*	

	Ответ: f возрастает на $[0;\ 2]$, убывает на $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 2$.
Типовое задание	***Найдите общий вид первообразных для функции:*** *а)* $f(x) = e^{5-2x}$; *б)* $f(x) = 3^{-5x}$; *в)* $f(x) = e^{-4x+2} - 2{,}71^{2x-4}$. *Решение.*

Производная логарифмической функции		
Производная логарифмической функции $\ln x$ $\ln' x = \frac{1}{x}$	**Теорема** Функция $\ln x$ дифференцируема в каждой точке области определения, и $\ln' x = \frac{1}{x}$.	**Доказательство или пример**
Производная логарифмической функции $\log_a x$ $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$	Функция $\log_a x$ дифференцируема в каждой точке области определения, и $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$.	
Первообразная функции $\frac{1}{x}$	Первообразной для функции $\frac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем точку 0, является функция $\ln\lvert x\rvert + C$.	
Типовое задание	*Найдите производную функции:* *а)* $f(x) = \ln(3x-4)$; *б)* $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$; *в)* $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$. *Решение.*	

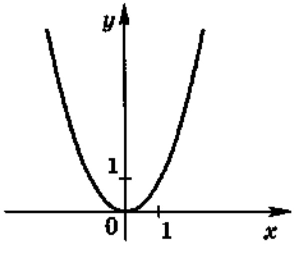
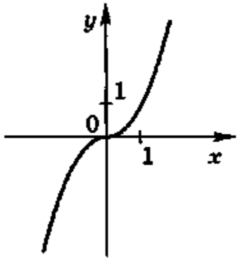
Типовое задание	***Найдите наибольшее и наименьшее значения функции*** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ***на промежутке*** $\left[1;\ e^2\right]$. ***Решение.*** ***Ответ:*** $\min\limits_{[1;e^2]} f(x) = f(1) = 0,\ \max\limits_{[1;e^2]} f(x) = f(e) = \dfrac{1}{e}$.
Типовое задание	***Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями*** $y = \dfrac{5}{x}$ ***и*** $y = 6 - x$. ***Решение.***

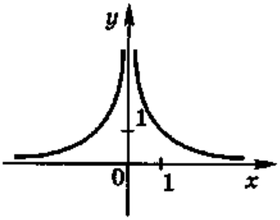
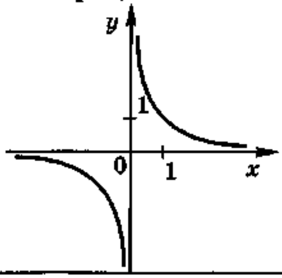
	Ответ: $12-5\ln 5$.
Полезное задание	*Докажите, что функция* $F(x)=x\ln x-x+C$ *является первообразной для функции* $f(x)=\ln x$ *на* $(0;\ +\infty)$.
Полезное задание	**а)** *Представьте показательно-степенную функцию* $y=x^x$ $(x>0)$ *в виде* $y=e^{x\ln x}$ *и докажите, что ее производную можно вычислить по формуле* $$\left(x^x\right)'=x^x(\ln x+1).$$ *б) Докажите формулу* $$\left(f(x)^{g(x)}\right)'=f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}g(x)\right),$$ *где f и g — дифференцируемые функции,* $f(x)>0$.

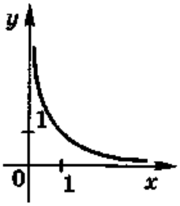
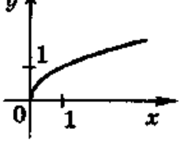
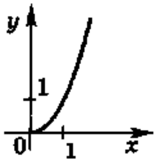
Степенная функция

Степенная функция	**Функция, заданная формулой $y=x^{\alpha}$, где α — произвольное действительное число, называется степенной (с показателем степени α).**

Свойства степенной функции

Функция / **Свойство**	**$y=x^{\alpha}$, α — четное натуральное**	**$y=x^{\alpha}$, α — нечетное натуральное**
		
Область определения	$D(y)=R$	$D(y)=R$

Область значений	$E(y) = [0;\ +\infty)$	$E(y)=\boldsymbol{R}$
Четность, нечетность	четная	нечетная
Нули	$y=0$ при $x=0$	$y=0$ при $x=0$
Промежутки знакопостоянства	$y>0$ при $x\neq 0$	$y<0$ при $x<0$, $y>0$ при $x>0$
Монотонность	убывает на $(-\infty;\ 0]$, возрастает на $[0;+\infty)$	возрастает на $\boldsymbol{R}$
Функция / **Свойство**	**$y = x^{\alpha}$, α — четное отрицательное** 	**$y = x^{\alpha}$, α — нечетное отрицательное** 
Область определения	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значений	$E(y) = (0;\ +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Четность, нечетность	четная	нечетная
Нули	нулей нет	нулей нет
Промежутки знакопостоянства	$y>0$ при $x \neq 0$	$y<0$ при $x<0$, $y>0$ при $x>0$
Монотонность	возрастает на $(-\infty;\ 0)$, убывает на $(0;\ +\infty)$	убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0; +\infty)$

Функция / **Свойство**	**α — не целое отрицательное число**	**α — не целое положительное число**	
	$\alpha<0$ 	$0<\alpha<1$ 	$\alpha>1$ 

Область определения	$D(y)=(0;\ +\infty)$	$D(y)=[0;\ +\infty)$
Область значений	$E(y)=(0;\ +\infty)$	$E(y)=[0;\ +\infty)$
Четность, нечетность	**ни четная, ни нечетная**	**ни четная, ни нечетная**
Нули	**нулей нет**	$y=0$ **при** $x=0$
Промежутки знако-постоянства	$y>0$ **при** $x>0$	$y>0$ **при** $x>0$
Монотонность	**убывает на** $(0;\ +\infty)$	**возрастает на** $[0;\ +\infty)$

Замечание. **Если $\alpha=0$, то степенная функция имеет вид $y=x^0=1$ и определена при $x\neq 0$. Ее график — прямая, параллельная оси Ox, с выколотой точкой (0; 1). При $\alpha=1$ график функции $y=x$ — прямая.**

Особенности нахождения ОДЗ алгебраических выражений
(обобщающая таблица)

Вид выражения	**Особенность нахождения ОДЗ**	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	**Выражения, стоящие в знаменателях дробей, не должны равняться нулю.**
$\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x)\geq 0$	**Выражения, стоящие под знаком корня четной степени, должны быть неотрицательны.**
$(f(x))^0$; $f^\alpha(x)$, где $\alpha<0$	$f(x)\neq 0$	**Нуль нельзя возводить в нулевую и отрицательную степени.**
$f^\alpha(x)$, где α — дробное положительное число;	$f(x)\geq 0$	**Отрицательные числа нельзя возводить в дробную степень.**
$f^\alpha(x)$, где α — дробное отрицательное число	$f(x)>0$	
$\log_a f(x)$	$f(x)>0$	**Выражения, стоящие под знаком логарифма, должны быть положительны.**
$\log_{f(x)} A$	$f(x)>0,$ $f(x)\neq 1$	**Выражения, стоящие в основании логарифма, должны быть положительны и не равны единице.**
$\operatorname{tg} f(x)$	$f(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n,$ где $n\in Z$	**Аргумент тангенса не должен принимать значений, для которых тангенс не определен** $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right)$.

$\mathrm{ctg} f(x)$	$f(x) \neq \pi n$, где $n \in Z$	Аргумент котангенса не должен принимать значений, для которых котангенс не определен $(\pi n,\ n \in Z)$.
$\arcsin f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$	Аргументы арксинуса и арккосинуса не должны превосходить по модулю единицу.
$\arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$	

	Теорема	Доказательство или пример
Производная степенной функции $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	**Функция $y = x^{\alpha}$ дифференцируема в каждой точке области определения, и** $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.	

Первообразная степенной функции	**Общий вид первообразных для степенной функции $y = x^{\alpha}$:** **при** $\alpha \neq -1$ $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, **при** $\alpha = -1$ $F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$, **где** $C \in R$.

	Формула	Пример
Вычисление значений степенной функции	$(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x$	*Найдите приближенное значение:* $\sqrt[3]{1{,}4} = (1+0{,}4)^{\frac{1}{3}} \approx$
	$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \dfrac{\Delta x}{n}$	

Типовое задание	***Найдите производную функции:*** *а)* $f(x) = \left(\dfrac{x}{4}\right)^{-\ln 5}$; *б)* $f(x) = \sqrt[5]{7\sin\dfrac{x}{2}}$. ***Решение.***

Типовое задание	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями*** $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ *и* $x = e^3$. ***Решение.*** ***Ответ***: **6.**
Типовое задание	***Вычислите приближенное значение*** $\sqrt[5]{36}$. ***Решение.*** ***Ответ***: **2,05.** ***Указание.*** $36 = 32 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)$.

Понятие о дифференциальных уравнениях		
Название уравнения	**Вид уравнения**	**Формула решений**
Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания	$f'(x) = kf(x)$, где k —постоянная	$f(x) = Ce^{kx}$, где C — произвольная постоянная
Дифференциальное уравнение гармонических колебаний	$f''(t) = -\omega^2 f(t)$, где ω — положительная постоянная	$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные
Типовое задание	***Проверьте, что функция $y(t)$ является решением данного дифференциального уравнения:*** *а)* $y(t) = 3\cos 4t$, $y''(t) + 16y = 0$; *б)* $y(t) = 7e^{-3t}$, $y'(t) + 3y = 0$. ***Решение.***	
Типовое задание	***Найдите какое-нибудь отличное от нуля решение данного дифференциального уравнения:*** *а)* $y''(t) + \frac{1}{4}y = 0$; *б)* $y'(t) - 12y = 0$. ***Решение.***	

Полезное задание (дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными	*Если f и g — непрерывные функции, а F и G — их первообразные, то дифференциальное уравнение $f(y)\cdot y'(x)=g(x)$ имеет общее решение $G(x)=F(y)+C$, откуда y выражается через x. Докажите. Решите уравнение $y\cdot y'(x)=-x$.*

Дополнительные сведения и задачи по теме

ПРИЛОЖЕНИЕ

Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл	Определение и свойства	Примеры
	Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ называется неопределенным интегралом на этом промежутке. ***Обозначение.*** $\int f(x)dx$.	$\int \cos 4x dx =$
	Если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, то $$\int f(x)dx = F(x) + C ,$$ **где $\int$ — знак неопределенного интеграла,** **$f(x)$ — подынтегральная функция,** **$f(x)dx$— подынтегральное выражение,** **C — постоянная.**	
Свойства неопределенного интеграла	**1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:** $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) .$$	$\left(\int \mathrm{tg}x dx\right)' =$
	2. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен сумме самой этой функции и произвольной постоянной: $$\int F'(x)dx = F(x) + C .$$	$\int (\mathrm{tg}x)' dx =$
	3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx ,$$ **где k — постоянная, $k \neq 0$.**	$\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} + 3x^2\right) dx =$
	4. Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от каждой функции, если эти функции имеют первообразные: $$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$	

Типовое задание	*Вычислите интеграл:* *а)* $\int \cos^4 x dx$; *б)* $\int \sin x \cos 3x dx$. *Решение.* *Ответ:* *а)* $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; *б)* $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$.

Методы интегрирования

Метод подстановки (замены переменной)	**Этот метод позволяет с помощью определенной подстановки привести интеграл к табличному. В основе метода лежит формула замены переменной в неопределенном интеграле:** $$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$ **где $x=\varphi(t)$ — строго монотонная и дифференцируемая на промежутке T функция, а функция $f(x)$ непрерывна на X. Эта формула применяется как справа налево, так и слева направо.**

1-ый способ	**2-ой способ**
Подстановка $x=\varphi(t)$ приводит к более простому интегралу, который можно вычислить, тогда $$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C,$$ **при таком t, что $\varphi(t)=x$.**	**Подстановка $t=\varphi(x)$ приводит к более простому интегралу, который можно вычислить, тогда** $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt=F(t)+C,$$ **где $t=\varphi(x)$.**

Пример

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} x=\sin t, & dx=\cos t\,dt, \\ \sqrt{1-x^2}=\cos t, & \\ t=\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2} & \end{array}\right| =$$

$$= \int\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x+\sin t\cos t)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример

$$\int x\cos x^2\,dx = \left|\begin{array}{l} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x^2 + C.$$

Замечание. **Вычисляя интеграл таким способом, новую переменную вводить не обязательно, а запись можно вести следующим образом:**

$$\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\cos x^2\,dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x^2 + C.$$

Типовое задание

Вычислите интеграл:

а) $\int 3x^2\sin x^3\,dx$; *б)* $\int 2x\left(x^2-1\right)^7 dx$; *в)* $\int\cos x\sin^6 x\,dx$.

Решение.

Ответ: *а)* $-\cos x^3+C$; *б)* $\frac{\left(x^2-1\right)^8}{8}+C$; *в)* $\frac{\sin^6 x}{6}+C$.

Интегрирование по частям

В основе этого метода лежит формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на X.

Примеры

1. $\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

2. $\int \arcsin x dx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{vmatrix} = x\arcsin x - \int \dfrac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x\arcsin x - \int \dfrac{dx^2}{2\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \int \dfrac{d\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

Замечание. **В этом примере используются одновременно два приема — интегрирование по частям и замена переменной.**

Типовое задание

Вычислите интеграл:

а) $\int x^2 \sin x dx$; *б)* $\int \arccos x dx$.

Решение.

Ответ: *а)* $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; *б)* $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

Вычисление площадей плоских фигур

Типовое задание

Вычислите площадь фигуры, ограниченной:

а) графиком функции $y = \cos x$*, прямой* $x = \frac{7\pi}{6}$ *и отрезком* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right]$ *оси* Ox*;*

б) графиком функции $y = x^2$ *и касательными к графику функции* $y = x^2$ *в точках* $x_1 = -1$ *и* $x_2 = 2$*.*

Решение.

Ответ: *а) 3,5. Указание. Найдите искомую площадь как сумму площадей. б) 2,25. Указание. Найдите абсциссу точки пересечения касательных и вычислите искомую площадь как сумму двух площадей.*

Типовое задание

Используя геометрические соображения, вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_{1,5}^{3} \sqrt{4x - x^2 - 3}\,dx$.

	Решение. *Ответ:* *а)* $\frac{\pi}{2}$; *б)* $\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{24}$. ***Указание.*** *График подынтегральной функции — полуокружность, а искомый интеграл равен половине площади круга (сегмента).*

Решение иррациональных уравнений

Схема решения уравнений вида

$$\sqrt{f_1(x)} \pm \sqrt{f_2(x)} \pm \sqrt{f_3(x)} \pm \sqrt{f_4(x)} = 0, \text{ где } f_1(x)+f_2(x)=f_3(x)+f_4(x) \text{ или}$$

$$f_1(x)+f_3(x)=f_2(x)+f_4(x) \text{ или } f_1(x)+f_4(x)=f_2(x)+f_3(x)$$

Этапы решения	Примеры	
	$\sqrt{5+x}-\sqrt{4-5x}+$ $+\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}=0$	$\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+3}-$ $-\sqrt{8x}+\sqrt{4x+2}=0$
1. Уедините по два радикала в каждой части уравнения так, чтобы сумма подкоренных выражений была одинакова.	$\sqrt{5+x}+\sqrt{8-x}=$ $=\sqrt{4-5x}+\sqrt{9+5x}.$	

2. Возведите обе части уравнения в квадрат и приведите подобные слагаемые.	$5+x+8-x+2\sqrt{(5+x)(8-x)}=$ $=4-5x+9+5x+$ $+2\sqrt{(4-5x)(9+5x)}.$	
3. Решите уравнение-следствие.	$2\sqrt{(5+x)(8-x)}=$ $=2\sqrt{(4-5x)(9+5x)};$ $(5+x)(8-x)=(4-5x)(9+5x);$ $40+3x-x^2=36-25x-25x^2;$ $24x^2+28x+4=0;$ $6x^2+7x+1=0;$ $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$	
4. Сделайте проверку.	Проверка. 1. $x=-1$: $\sqrt{5-1}-\sqrt{4-5\cdot(-1)}+$ $+\sqrt{8-(-1)}-\sqrt{9+5\cdot(-1)}=0$ — верно. 2. $x=-\dfrac{1}{6}$: $\sqrt{5-\dfrac{1}{6}}-\sqrt{4-5\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)}+$ $+\sqrt{8-\left(-\dfrac{1}{6}\right)}-\sqrt{9+5\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)}=0$ — верно.	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: $-1;\ -\dfrac{1}{6}$.	*Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.

Метод выделения полного квадрата под знаком корня

Схема решения на примере	Пример
$\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=x-3$	$\sqrt{x+2\sqrt{x-2}-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}=x-2$

1. Выделим полный квадрат под знаками корня:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2}=x-3.$$

2. Воспользуемся тождеством $\sqrt{a^2}=|a|$:

$$\left|\sqrt{x-3}+1\right|+\left|\sqrt{x-3}-1\right|=x-3.$$

3. Найдем ОДЗ: $x\ge 3$.

3. Так как $\sqrt{x-3}+1>0$ на ОДЗ, то данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x-3}+1+\left|\sqrt{x-3}-1\right|=x-3.$$

4. Так как $\sqrt{x-3}-1=0$ при $x=4$, то рассмотрим два случая: $3\le x\le 4$ и $x>4$.

1-ый случай. $3\le x\le 4$. При этих значениях переменной $\sqrt{x-3}-1\le 0$, то есть уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}3\le x\le 4,\\ \sqrt{x-3}+1-\sqrt{x-3}+1=x-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\le x\le 4,\\ x=5.\end{cases}$$ Система не имеет решения.

2-ой случай. $x>4$. При этих значениях переменной $\sqrt{x-3}-1>0$, то есть уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x>4,\\ \sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}-1=x-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>4,\\ 2\sqrt{x-3}=x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x>4,\\ 4(x-3)=(x-3)^2;\end{cases}$$

$\begin{cases} x > 4, \\ \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0, \\ x - 3 = 4; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 7; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 7$.	
Ответ: 7.	*Ответ*: 6.

Метод решения иррациональных уравнений умножением на сопряженный радикал

Схема решения на примере	Пример
$\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{10-x}-1\right) = x-3$	$\dfrac{\sqrt{17+x}+\sqrt{17-x}}{\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}} = \dfrac{17}{x}$
1. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{x-2}-1$, сопряженное выражению $\sqrt{x-2}+1$. Предварительно проверим, не являются ли корни уравнения $\sqrt{x-2}-1=0$ корнями данного уравнения. $\sqrt{x-2}-1=0$ при $x=3$. Поставим 3 в данное уравнение: $\left(\sqrt{3-2}+1\right)\left(\sqrt{10-3}-1\right)=3-3$ — неверно, значит операция умножения приведет к уравнению, равносильному исходному. $\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{10-x}-1\right) =$ $= (x-3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.	
2. Упростим уравнение: $(x-2-1)\left(\sqrt{10-x}-1\right) = (x-3)\left(\sqrt{x-2}-1\right)$; $\sqrt{10-x}-1 = \sqrt{x-2}-1$; $\sqrt{10-x} = \sqrt{x-2}$.	
3. Решим систему, равносильную полученному уравнению: $\begin{cases} 10-x = x-2, \\ x-2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ x > 2; \end{cases}$ $x = 6$.	
Ответ: 6.	*Ответ*: –17; 17.

Метод введения одной или нескольких новых переменных		
Решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = c$	Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = c$ можно решить двумя способами. • *Первый* способ основан на замене $u = \sqrt[3]{f(x)}$, $v = \sqrt[3]{g(x)}$ с дальнейшим переходом к равносильной системе. Его удобно применять в случае, если $af(x) \pm bg(x) = c_1$, где a, b, c_1 — некоторые числа, не равные нулю. • *Второй* способ основан на применении формул $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ или $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ с дальнейшим переходом к уравнению-следствию.	
Этапы решения 1-ый способ	**Примеры**	
	$\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{6-x} = 3$	$\sqrt[3]{x+17} - \sqrt[3]{x-2} = 1$
1. Сделайте замену переменных $\begin{cases} u = \sqrt[3]{f(x)}, \\ v = \sqrt[3]{g(x)}. \end{cases}$	Замена: $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3+x}, \\ v = \sqrt[3]{6-x}. \end{cases}$	
2. Подберите числа a и b так, чтобы выражение $au^3 + bv^3$ не содержало x.	$au^3 + bv^3 = a(3+x) + b(6-x) =$ $= (a-b)x + 3a + 6b.$ При $a=b=1$ $au^3+bv^3=9$.	
3. Решите систему $\begin{cases} u \pm v = c, \\ u^3 \pm v^3 = c_1. \end{cases}$	$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^3 + v^3 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = 3, \\ (u+v)(u^2 - uv + v^2) = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = 3, \\ 3 \cdot \left((u+v)^2 - 3uv\right) = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = 3, \\ 3 \cdot (3^2 - 3uv) = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2; \end{cases}$	

	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2,\\ v=1;\end{cases}\\ \begin{cases}u=1,\\ v=2.\end{cases}\end{array}\right.$	
4. Сделайте обратную замену и решите полученные системы.	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{3+x}=2,\\ \sqrt[3]{6-x}=1;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{3+x}=1,\\ \sqrt[3]{6-x}=2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3+x=8,\\ 6-x=1;\end{cases}\\ \begin{cases}3+x=1,\\ 6-x=8;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-2.\end{array}\right.$	
5. Запишите ответ.	***Ответ***: 5; –2.	***Ответ***: –25; 10.
	Замечание. Аналогично можно решить некоторые уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = c$.	
2-ой способ (для уравнений вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x)$)	**Примеры**	
	$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1$	$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$
1. Возведите обе части уравнения в куб, используя формулы $(a+b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.	$(x-1)+(2x-1)+$ $+3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}\times$ $\times\underbrace{(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1})}_{\text{по условию равно 1}}=1.$	
2. Замените в уравнении выражение $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}$ на $h(x)$. ***Замечание.*** **Эта замена может привести к появлению посторонних корней.**	$(x-1)+(2x-1)+$ $+3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=1.$	

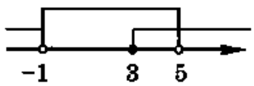
3. Решите уравнение-следствие.	$3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=3-3x;$ $\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=1-x;$ $(x-1)(2x-1)=(1-x)^3;$ $(x-1)(2x-1+x^2-2x+1)=0;$ $(x-1)x^2=0;$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=0.\end{array}\right.$	
4. Сделайте проверку.	**Проверка.** **1.** $\sqrt[3]{1-1}+\sqrt[3]{2-1}=1$ **— верно.** **2.** $\sqrt[3]{0-1}+\sqrt[3]{0-1}=1$ **— неверно.** **Следовательно,** $x=1$ **— корень уравнения.**	
5. Запишите ответ.	***Ответ*: 1.**	***Ответ*: 1; 2;** $\frac{3}{2}$.
Типовое задание	***Решите уравнение*** $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$ ***Решение.***	

Ответ: 1; 2; 10.

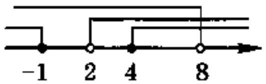
Иррациональные неравенства

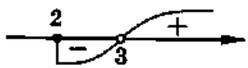
Решение иррациональных неравенств	**Основным методом решения иррациональных неравенств является приведение данного неравенства к равносильному рациональному неравенству, равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.**

Схемы решения некоторых видов иррациональных неравенств

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид неравенства и равносильный переход</th><th colspan="2">Примеры</th></tr>
<tr><th>$\sqrt{x^2-2x-3}<\sqrt{2x+2}$</th><th>$\sqrt{x^2-2x}>\sqrt{x+4}$</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ f(x)<g(x) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x^2-2x-3\ge 0, \\ x^2-2x-3<2x+2; \end{cases}$
$\begin{cases} x^2-2x-3\ge 0, \\ x^2-4x-5<0; \end{cases}$
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x\ge 3, \end{array}\right. \\ -1<x<5; \end{cases}$


$3\le x<5.$
Ответ: $[3;5)$.</td><td>*Ответ*: $[-4;-1)\cup(4;+\infty)$.</td></tr>
</table>

$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$	$\sqrt{x^2 - 3x - 4} < x - 2$	$\sqrt{x-1} \le x - 3$
	$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0, \\ x - 2 > 0, \\ x^2 - 3x - 4 < (x-2)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 4, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ x^2 - 3x - 4 < x^2 - 4x + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 4, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ x < 8; \end{cases}$  $4 \le x < 8.$ *Ответ*: $[4;\ 8)$.	*Ответ*: $[5;\ +\infty)$.
$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$	$\sqrt{x^2 - x - 2} > 4 + x$	$\sqrt{x-2} \ge 4 - x$
	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 + x < 0, \\ x^2 - x - 2 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4 + x \ge 0, \\ x^2 - x - 2 > (4+x)^2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -4, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 2; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -4, \\ x^2 - x - 2 > 16 + 8x + x^2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < -4, \\ \begin{cases} x \ge -4, \\ x < -2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < -4, \\ -4 \le x < -2; \end{array}\right.$ $x < -2.$ *Ответ*: $(-\infty;\ -2)$.	*Ответ*: $[3;\ +\infty)$.

Метод интервалов для решения иррациональных неравенств		
Этапы решения	**Пример**	
	$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}<\sqrt{x+6}$	$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\le\sqrt{x}$
1. Приведите неравенство к виду $f(x)>0\,(<,\le,\ge 0)$	$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6}<0$.	
2. Найдите ОДЗ.	ОДЗ: $\begin{cases}x-2\ge 0,\\x+1\ge 0,\\x+6\ge 0;\end{cases}\begin{cases}x\ge 2,\\x\ge -1,\\x\ge -6;\end{cases}\quad x\ge 2$.	
3. Найдите нули функции $y=f(x)$.	Пусть $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6}$. Найдем нули функции $f(x)$: $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+6}=0$; $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+6}$; $x-2+x+1+2\sqrt{(x-2)(x+1)}=$ $=x+6$; $2\sqrt{(x-2)(x+1)}=7-x$; $4(x-2)(x+1)=(7-x)^2$; $3x^2+10x-57=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{19}{3}\notin \text{ОДЗ},\\x=3.\end{array}\right.$ Проверка: $\sqrt{3-2}+\sqrt{3+1}=\sqrt{3+6}$ – верно.	
4. Обозначьте нули на ОДЗ и определите знаки функции $y=f(x)$ на каждом из образовавшихся промежутков ОДЗ.		
5. Запишите ответ, учитывая знак неравенства.	*Ответ*: $[2;\ 3)$.	*Ответ*: $[4;\ +\infty)$.

Равносильные переходы при решении некоторых видов иррациональных неравенств

с четным показателем корня ($n \in N$)

Вид строгого неравенства	Равносильная система или совокупность систем	Вид нестрогого неравенства	Равносильная система или совокупность систем
$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$	$\sqrt[2n]{f(x)} \le \sqrt[2n]{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$
$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$	$\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x)$	$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^{2n}(x) \end{cases}$
$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases} \end{array}\right.$	$\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^{2n}(x) \end{cases} \end{array}\right.$

с нечетным показателем корня ($n \in N$)

Вид строгого неравенства	Равносильное неравенство	Вид нестрогого неравенства	Равносильное неравенство
$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$	$f(x) < g(x)$	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \le \sqrt[2n+1]{g(x)}$	$f(x) \le g(x)$
$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$	$f(x) < g^{2n+1}(x)$	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \le g(x)$	$f(x) \le g^{2n+1}(x)$
$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$	$f(x) > g^{2n+1}(x)$	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \ge g(x)$	$f(x) \ge g^{2n+1}(x)$

Однородные показательные уравнения

Решение однородных показательных уравнений	**Однородными показательными уравнениями** называются уравнения, которые можно привести к виду $Au^{2f(x)} + Bu^{f(x)}v^{f(x)} + Cv^{2f(x)} = 0$ или $Au^{3f(x)} + Bu^{2f(x)}v^{f(x)} + Cu^{f(x)}v^{2f(x)} + Dv^{3f(x)} = 0$ и т. д. В эти уравнения степени входят с двумя различными основаниями, но с одинаковыми показателями степеней всех входящих в них одночленов. Метод решения: деление уравнения на одну из наивысших степеней и замена переменной.

Этапы решения	**Примеры**	
	$4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$	$2^{2x+3} - 19 \cdot 6^x - 3^{2x+3} = 0$

1. Приведите все степени к двум основаниям и проверьте, является ли данное уравнение однородным.	$4^{x+1}-13\cdot 6^x+9^{x+1}=0$; $4\cdot 4^x-13\cdot 2^x\cdot 3^x+9\cdot 9^x=0$; $4\cdot 2^{2x}-13\cdot 2^x\cdot 3^x+9\cdot 3^{2x}=0$.	
2. Разделите уравнение на одну из наивысших степеней.	Разделим уравнение на $3^{2x}>0$: $4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+9=0$.	
3. Сделайте замену переменной.	Замена: $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.	
4. Решите полученное уравнение.	$4y^2-13y+9=0$; $\left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=\frac{9}{4}. \end{array}\right.$	
5. Сделайте обратную замену и решите простейшие показательные уравнения.	$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x=1, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{9}{4}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2. \end{array}\right.$	
6. Запишите ответ.	*Ответ*: –2; 0.	*Ответ*: –3.
Типовое задание	*Решите уравнение* $3\cdot 16^x+37\cdot 36^x-26\cdot 81^x=0$. *Решение.*	

	Ответ: 0,5.

Показательно-степенные уравнения

Показательно-степенное уравнение	**Показательно-степенным** называется уравнение вида $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, содержащее переменную как в основаниях степеней, так и в показателях. В предложенной ниже схеме решения функции $f(x)^{g(x)}$ и $f(x)^{h(x)}$ *не рассматриваются как показательные.*
Особенности решения показательно-степенных уравнений	Решение показательно-степенного уравнения состоит из двух этапов. **1-ый *этап*.** Решение совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = 1, \\ f(x) = 0, \\ f(x) = -1, \\ g(x) = h(x). \end{array}\right.$ **2-ой *этап*.** Проверка корней. При проверке корней учитываются *четыре особенности* данного уравнения: 1. Равенство $1^{g(x)} = 1^{h(x)}$ верно при любых x из области определения функций $g(x)$ и $h(x)$. 2. Равенство $0^{g(x)} = 0^{h(x)}$ верно при $g(x) > 0$ и $h(x) > 0$, так как 0^0 *и нуль в отрицательной степени не определены.* 3. Равенство $(-1)^{g(x)} = (-1)^{h(x)}$ верно при *целочисленных* значениях функций $g(x)$ и $h(x)$ *одинаковой четности.* 4. Корни уравнения $g(x) = h(x)$ являются корнями исходного уравнения, если при значениях x, удовлетворяющих этому уравнению, исходное уравнение имеет смысл.

Этапы решения	**Примеры**	
	$(x-2)^{x^2-2x} = (x-2)^{2-x}$	$(3-x)^{x^2-3x} = (3-x)^{3-x}$

1. Решите совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=1, \\ f(x)=0, \\ f(x)=-1, \\ g(x)=h(x). \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} x-2=1, \\ x-2=0, \\ x-2=-1, \\ x^2-2x=2-x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=2, \\ x=1, \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=2, \\ x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$	
2. Сделайте проверку найденных корней.	Проверка: 1) $x=3: 1^3=1^{-1}$ — верно; 2) $x=2: 0^0=0^0$ — не определено; 3) $x=1: (-1)^{-1}=(-1)^1$ —верно; 4) $x=-1: (-3)^3=(-3)^3$ — верно.	
3. Запишите ответ.	*Ответ*: –1; 1; 3.	*Ответ*: –1; 2.

Замечание. Существует и другой подход к решению показательно-степенных уравнений, при котором функции $f(x)^{g(x)}$ и $f(x)^{h(x)}$ рассматриваются как показательные, поэтому уравнение считается равносильным совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)=h(x), \end{cases} \\ f(x)=1. \end{array}\right.$

Корни уравнения $f(x)=1$ обязательно проверяются подстановкой в исходное уравнение.

Типовое задание	*Решите уравнение* $(x+1)^{x^2-2x}=(x+1)^{x-2}$. *Решение.*

Ответ: −2; 0; 1; 2.

Логарифмические уравнения и неравенства с переменным основанием логарифма

Решение логарифмических уравнений с переменным основанием логарифма

Вид уравнения	ОДЗ и уравнение-следствие	Равносильная система
$\log_{f(x)} A = b$ $(A > 0)$	ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$ Уравнение-следствие: $f^b(x) = A.$	$\begin{cases} f^b(x) = A, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$
$\log_{g(x)} f(x) = b$	ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$ Уравнение-следствие: $f(x) = g^b(x).$	$\begin{cases} f(x) = g^b(x), \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$
$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$ $(A > 0)$	ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$ 1-ый *случай.* $A \neq 1.$ Уравнение-следствие: $f(x) = g(x)$ 2-ой *случай.* $A = 1.$ Решением уравнения является ОДЗ.	1-ый *случай.* $A \neq 1.$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \ (\text{или } g(x) > 0), \\ f(x) \neq 1 \ (\text{или } g(x) \neq 1). \end{cases}$ 2-ой *случай.* $A = 1.$ $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$

$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$	ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$ Уравнение-следствие: $f(x) = g(x)$.	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \ (\text{или } g(x) > 0), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$
$\log_{g(x)} f(x) = \log_{h(x)} f(x)$	ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$ Совокупность уравнений-следствий: $\left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ f(x) = 1, \end{array}\right. \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Схемы решения логарифмических уравнений с переменным основанием логарифма на примерах

Вид уравнения, его ОДЗ и равносильная система	Примеры	
	$\log_{(x-1)}\left(x^2 - 5x + 7\right) = 1$	$\log_x \left(x^2 - 4x + 4\right) = 1$
$\log_{g(x)} f(x) = b$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$ Равносильная система: $\begin{cases} f(x) > g(x)^b, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$	Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 - 5x + 7 = x - 1, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ x > 1, \\ x \neq 2; \end{cases}$ $x = 4$. *Ответ*: 4.	*Ответ*: 4.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">$\log_{h(x)} f(x) =$
$= \log_{h(x)} g(x)$
ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \ne 1. \end{cases}$
Равносильная система:
$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \\ \quad (\text{или } g(x) > 0), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \ne 1. \end{cases}$</td>
<td>$\log_{x^2}(x+2) = \log_{x^2}(3-x)$</td>
<td>$\log_{5-x}(3x-2) = \log_{5-x}(2+2x)$</td>
</tr>
<tr>
<td>**Уравнение равносильно системе:**
$\begin{cases} x+2 = 3-x, \\ x+2 > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \ne 1; \end{cases} \begin{cases} x = 0,5, \\ x > -2, \\ x \ne 0, \\ x \ne \pm 1; \end{cases}$
$x = 0,5.$
Ответ: 0,5.</td>
<td>*Ответ*: корней нет.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$\log_{g(x)} f(x) =$
$= \log_{h(x)} f(x)$
ОДЗ:
$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \ne 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \ne 1. \end{cases}$
Равносильная система:</td>
<td>$\log_{(7x-10)}\left(9-x^2\right) = \log_{x^2}\left(9-x^2\right)$</td>
<td>$\log_{(x+2)}\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \log_{x^2}\left(\frac{3}{x}\right)^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>**Уравнение равносильно системе:**
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 7x-10 = x^2, \\ 9-x^2 = 1, \end{array}\right. \\ 7x-10 > 0, \\ 7x-10 \ne 1, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \ne 1, \\ 9-x^2 > 0; \end{cases}$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ f(x) = 1, \end{array}\right. \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 5, \\ x = \pm 2\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{10}{7}, \\ x \neq \dfrac{11}{7}, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ -3 < x < 3; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

***Ответ*: 2; $2\sqrt{2}$.**

***Ответ*: 2; 3.**

Типовое задание	***Решите уравнение:*** *а)* $\log_{x+1}\left(x^2 - 5\right) = 1$; *б)* $\log_{x-6}(x^2 - 6x) = \log_{x-6}(6x - 32)$. ***Решение.***

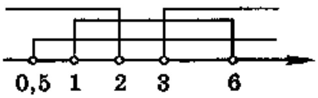
	Ответ: *а*) 3; *б*) 8.

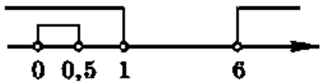
Замена переменной в уравнениях и неравенствах с переменным основанием логарифма

Решение уравнений и неравенств с переменным основанием логарифма методом замены переменной	<u>Идея решения</u>: если логарифмическое уравнение (неравенство) содержит логарифмы как с переменным, так и с постоянным основанием, то часто за счет применения логарифмического тождества $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ его удается свести к уравнению (неравенству) с постоянным основанием логарифма и решить методом замены переменной.	
Этапы решения	**Примеры**	
	$\log_5 x + \log_x 25 = 3$	$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_x 3 - 2,5$
1. Найдите ОДЗ.	ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$.	
2. Применяя логарифмические тождества, избавьтесь от логарифмов с переменным основанием.	$\log_5 x + 2\log_x 5 = 3$; $\log_5 x + \dfrac{2}{\log_5 x} = 3$.	

3. Сделайте замену переменной и решите полученное рациональное уравнение (неравенство).	Замена: $y = \log_5 x$. $y + \frac{2}{y} = 3$; $\frac{y^2 - 3y + 2}{y} = 0$; $\left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = 1. \end{array}\right.$	
4. Сделайте обратную замену и решите логарифмические уравнения (неравенства) с учетом ОДЗ.	$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = 5. \end{array}\right.$	
5. Запишите ответ.	*Ответ*: 5; 25.	*Ответ*: $\left(1; \sqrt{3}\right) \cup (9; +\infty)$.
Типовое задание	***Решите методом замены переменной:*** *а) уравнение* $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$; *б) неравенство* $\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x \leq 1$. ***Решение.***	

	Ответ: *а*) $\frac{1}{9}$; 3; *б*) $\left[\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)\cup[1;3]$.
Логарифмические неравенства с переменным основанием логарифма	
Решение логарифмических неравенств с переменным основанием логарифма	**Идея решения**: решение логарифмических неравенств с переменным основанием логарифма $h(x)$ сводится к рассмотрению двух случаев: $h(x)>1$ (при потенцировании знак неравенства не меняется) и $0<h(x)<1$ (при потенцировании знак неравенства меняется). **Методы решения** аналогичны методам, применяемым для неравенств с постоянным основанием логарифма (равносильный переход, тождественные преобразования на ОДЗ и т.д.).

	Например, неравенство $\log_{h(x)} f(x) \ge \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}h(x)>1,\\ f(x)\ge g(x),\\ g(x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<h(x)<1,\\ f(x)\le g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$	
Этапы решения	**Примеры**	
	$\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$	$\log_x(x^2-x)\ge 1$
1. Составьте совокупность систем из условий равносильного перехода и значений, принимаемых основанием $h(x)$.	$\log_{2x}(x^2-5x+6)<\log_{2x}2x$; данное неравенство сводится к совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x>1,\\ x^2-5x+6<2x,\\ x^2-5x+6>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x<1,\\ x^2-5x+6>2x,\\ 2x>0.\end{cases}\end{array}\right.$	
2. Решите систему неравенств для случая $h(x)>1$.	1) $\begin{cases}2x>1,\\ x^2-5x+6<2x,\\ x^2-5x+6>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,5,\\ x^2-7x+6<0,\\ x^2-5x+6>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,5,\\ 1<x<6,\\ \left[\begin{array}{l}x<2,\\ x>3;\end{array}\right.\end{cases}$  $\left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 3<x<6.\end{array}\right.$	

2. Решите систему неравенств для случая $0 < h(x) < 1$.	2) $\begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x, \\ 2x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 0{,}5, \\ x^2 - 7x + 6 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 0{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 6; \end{array}\right. \end{cases}$  $0 < x < 0{,}5$.	
3. Запишите ответ, объединив полученные решения.	***Ответ:*** $(0;0{,}5) \cup (1;2) \cup (3;6)$.	***Ответ:*** $[2;+\infty)$.
Типовое задание	***Решите неравенство*** $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$. ***Решение.*** ***Ответ:*** $(\log_9 7;1) \cup (1;+\infty)$.	

Метод логарифмирования при решении показательных и логарифмических уравнений

Решение уравнений методом логарифмирования	**Идея решения**: логарифмирование обеих частей уравнения по некоторому основанию. Метод логарифмирования часто применяется в двух случаях: 1) для решения показательных уравнений вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Поскольку обе части уравнения положительны, то, логарифмируя их по основанию a, получаем уравнение, равносильное данному: $f(x) = g(x)\log_a b$; 2) для решения уравнений вида $x^{f(\log_a x)} = a^c$. В этом случае логарифмирование по основанию a позволяет перейти к логарифмическому уравнению, которое чаще всего решается с помощью замены переменной.

Замечание. Метод логарифмирования может применяться и для решения аналогичных неравенств. При логарифмировании знак неравенства меняется или остается без изменений в зависимости от основания логарифма.

Схема решения на примере	**Пример**
$4^{2x-3} = 7^{1-x}$	$5^{1-x} = 9^x$
1. Так как $4^{2x-3} > 0$ и $7^{1-x} > 0$, прологарифмируем обе части уравнения по основанию 4: $2x - 3 = (1 - x)\log_4 7$.	
2. Решим полученное уравнение: $x(2 + \log_4 7) = 3 + \log_4 7$, $x = \dfrac{3 + \log_4 7}{2 + \log_4 7} = \dfrac{\log_4 4^3 \cdot 7}{\log_4 4^2 \cdot 7} = \log_{112} 448$.	
3. *Ответ*: $\log_{112} 448$.	*Ответ*: $\log_{45} 5$.

Схема решения на примере	**Пример**
$x^{\lg x - 2} = 1000$	$x^{\log_2 x} = 64x$
1. ОДЗ: $x > 0$.	
2. Так как на ОДЗ обе части уравнения положительны, прологарифмируем их по основанию 10: $\lg x^{\lg x - 2} = \lg 1000$; $(\lg x - 2)\lg x = 3$; $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$.	

3. Сделаем замену переменной $y = \lg x$. $$y^2 - 2y - 3 = 0;$$ $$\left[\begin{aligned} &y = -1, \\ &y = 3. \end{aligned}\right.$$	
4. Выполним обратную замену: $$\left[\begin{aligned} &\lg x = -1, \\ &\lg x = 3; \end{aligned}\right.$$ $$\left[\begin{aligned} &x = 0,1, \\ &x = 1000. \end{aligned}\right.$$	
5. *Ответ*: 0,1; 1000.	*Ответ*: 0,25; 8.

Решение показательно-логарифмических уравнений вида $Ax^{\log_c a} + Ba^{\log_c x} + C = 0$	Для решения уравнений вида $Ax^{\log_c a} + Ba^{\log_c x} + C = 0$ используется формула $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$. Ее легко доказать, прологарифмировав обе положительные части равенства по основанию c: $\log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b$. Применив эту формулу к первому члену, имеем линейное уравнение относительно $a^{\log_c x}$: $Aa^{\log_c x} + Ba^{\log_c x} + C = 0$.

Схема решения	**Примеры**	
	$x^{\log_3 8} = 128 - 8^{\log_3 x}$	$7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$
1. Найдите ОДЗ.	ОДЗ: $x > 0$.	
2. Примените формулу $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.	$8^{\log_3 x} = 128 - 8^{\log_3 x}$;	
3. Решите полученное уравнение.	$2 \cdot 8^{\log_3 x} = 128$; $8^{\log_3 x} = 64$; $8^{\log_3 x} = 8^2$; $\log_3 x = 2$; $x = 9$.	
4. Запишите ответ.	*Ответ*: 9.	*Ответ*: 100.

Типовое задание	*Решите уравнение* $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$. ***Решение.*** *Ответ:* $\frac{1}{6}$; 6. *Указание.* $6^{\log_6^2 x} = \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x}$.

Применение свойств функций при решении уравнений

Свойство функции	Рекомендации к применению	Пример
1. Область определения.	Если пересечение областей определения функций, стоящих в обеих частях уравнения (то есть ОДЗ уравнения) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения подстановкой в данное уравнение.	$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}-x=1$ ОДЗ: $x=-1$, $x=1$. Проверка показывает, что $x=-1$ – корень уравнения.
2. Область значений.	Если для уравнения $f(x) = g(x)$ на его ОДЗ справедливы неравенства $f(x) \geq a$ и $g(x) \leq a$, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$	$2^{\cos x} = x^2 + 2$ Так как при любом x $2^{\cos x} \leq 2$, $x^2 + 2 \geq 2$, то уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2^{\cos x} = 2, \\ x^2 + 2 = 2; \end{cases}$ отсюда $x = 0$.

3. Монотонность.	1. Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ является возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, то данное уравнение имеет на этом промежутке не более одного корня. Это означает, что искомый корень можно найти подбором, и, опираясь на монотонность функции $f(x)$, доказать, что других корней нет.	$3^x+4^x=25$ Очевидно, что $x=2$ – корень уравнения. Поскольку функция $f(x)=3^x+4^x$ является возрастающей на всей числовой оси (как сумма двух возрастающих функций), то других корней уравнение не имеет.
	2. Если в уравнении $f(x)=g(x)$ функция $f(x)$ является возрастающей, а функция $g(x)$ – убывающей на некотором промежутке, то данное уравнение имеет на этом промежутке не более одного корня. Это означает, что искомый корень можно найти подбором, и, опираясь на монотонность функций $f(x)$ и $g(x)$, доказать, что других корней нет.	$2^{2x}=5-x$ Очевидно, что $x=1$ – корень уравнения. Поскольку функция $f(x)=2^{2x}$ является возрастающей, а функция $g(x)=5-x$ – убывающей на всей числовой оси, то других корней уравнение не имеет.
Замечание. Описанный подход может применяться также для решения неравенств и систем.		
Типовое задание	*Решите уравнение*: *а)* $3^x+5^x=8^x$; *б)* $3^x=10-\log_2 x$; *в)* $\arccos x+\sqrt{x^2-1}=0$. *Решение.*	

	Ответ: *а*) 1; *б*) 2; *в*) 1. ***Указание. а) Разделите обе части уравнения на*** 8^x.
Типовое задание	***Решите уравнение:*** $\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2 x=2x-x^2.$ ***Решение.*** *Ответ:* 1. ***Указание. Покажите, что левая часть уравнения не меньше*** 1, ***а правая не больше*** 1.

Дополнительные сведения и задачи по теме

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7-11 КЛАССОВ

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Разность квадратов	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Сумма кубов	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Разность кубов	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Куб суммы	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Куб разности	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Разность n-х степеней	$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c

Формула корней	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$
Разложение на множители	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ если $D\ge 0$
Теорема Виета	x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
$a_{n+1}=a_n+d$, где d — разность прогрессии	$b_{n+1}=b_n\cdot q$, где q — знаменатель прогрессии ($b_1\ne 0$, $q\ne 0$)
Формулы разности $d=a_{n+1}-a_n$ $d=\dfrac{a_n-a_k}{n-k}$, если $n\ne k$	**Формулы знаменателя** $q=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $q^{n-k}=\dfrac{b_n}{b_k}$, если $n\ne k$

Формулы n-го члена	
$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = a_k + (n-k)d$	$b_n = b_k \cdot q^{n-k}$
$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$
Характеристическое свойство	
$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, где $n \geq 2$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, где $n \geq 2$
Формулы суммы n первых членов	
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} n$ $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$	$S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, если $q \neq 1$ $S_n = nb_1$, если $q = 1$
Если $n+m=k+p$, то	
$a_n + a_m = a_k + a_p$	$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$
Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии с $\lvert q \rvert < 1$ $S = \dfrac{b_1}{1-q}$	

Арифметический корень

Умножение корней	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$
Деление корней	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$
Возведение корня в степень	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0)$
Извлечение корня из корня	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(a \geq 0)$
Сокращение показателей	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0)$

Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$, где n – четное, $b \ge 0$; $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, где n – нечетное.
Внесение множителя под знак корня	**Для четных n:** $a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a \ge 0,\ b \ge 0), \\ -\sqrt[n]{a^n \cdot b}, (a < 0,\ b \ge 0). \end{cases}$ **Для нечетных n:** $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$.

Степень

Степень с натуральным показателем: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}$, $a^1 = a$ **Степень с рациональным показателем:** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \ge 0, m \in Z, n \in N,\ n \ne 1)$ **Степень с отрицательным показателем:** $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $(a \ne 0)$ **Степень с нулевым показателем:** $a^0 = 1$ $(a \ne 0)$	
Умножение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
Деление степеней	$a^p : a^q = a^{p-q}$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q = a^{pq}$
Возведение в степень произведения	$(ab)^p = a^p b^p$
Возведение в степень частного	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

Основные формулы тригонометрии

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Значения тригонометрических функций некоторых углов								
$n°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Формулы сложения

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{ctg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}$
$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{ctg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$

Формулы двойного угла

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha\ -1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Формулы понижения степени

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Формулы половинного угла

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

Формулы тройного угла

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$

Формулы суммы и разности

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Метод вспомогательного угла

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, где φ определяется из условий $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$
$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Решение простейших тригонометрических уравнений	
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$ $\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$ **Частные случаи:**	$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$ $\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$ **Частные случаи:**

$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{tg} x = a$ $\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z}$	$\operatorname{ctg} x = a$ $\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z}$

Свойства обратных тригонометрических функций

- $\arcsin(-a) = -\arcsin a,\quad \lvert a\rvert \le 1$
- $\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\quad \lvert a\rvert \le 1$
- $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,\ a \in R$
- $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,\quad a \in R$
- $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ \lvert a\rvert \le 1$
- $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},\quad a \in R$

Свойства логарифмов

$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \ne 1, c \ne 1,\ x > 0,\ y > 0,\ p, q \in R, q \ne 0)$

- Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- Логарифм произведения $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- Логарифм частного $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

- Логарифм степени $\log_a x^p = p\log_a x$, $\quad \log_{a^q} x^p = \dfrac{p}{q}\log_a x$
- Логарифм корня $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}\log_a x$
- Формула перехода к другому основанию $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$,

  $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(b \neq 1)$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $(b \neq 1)$

Таблица производных и первообразных для некоторых функций

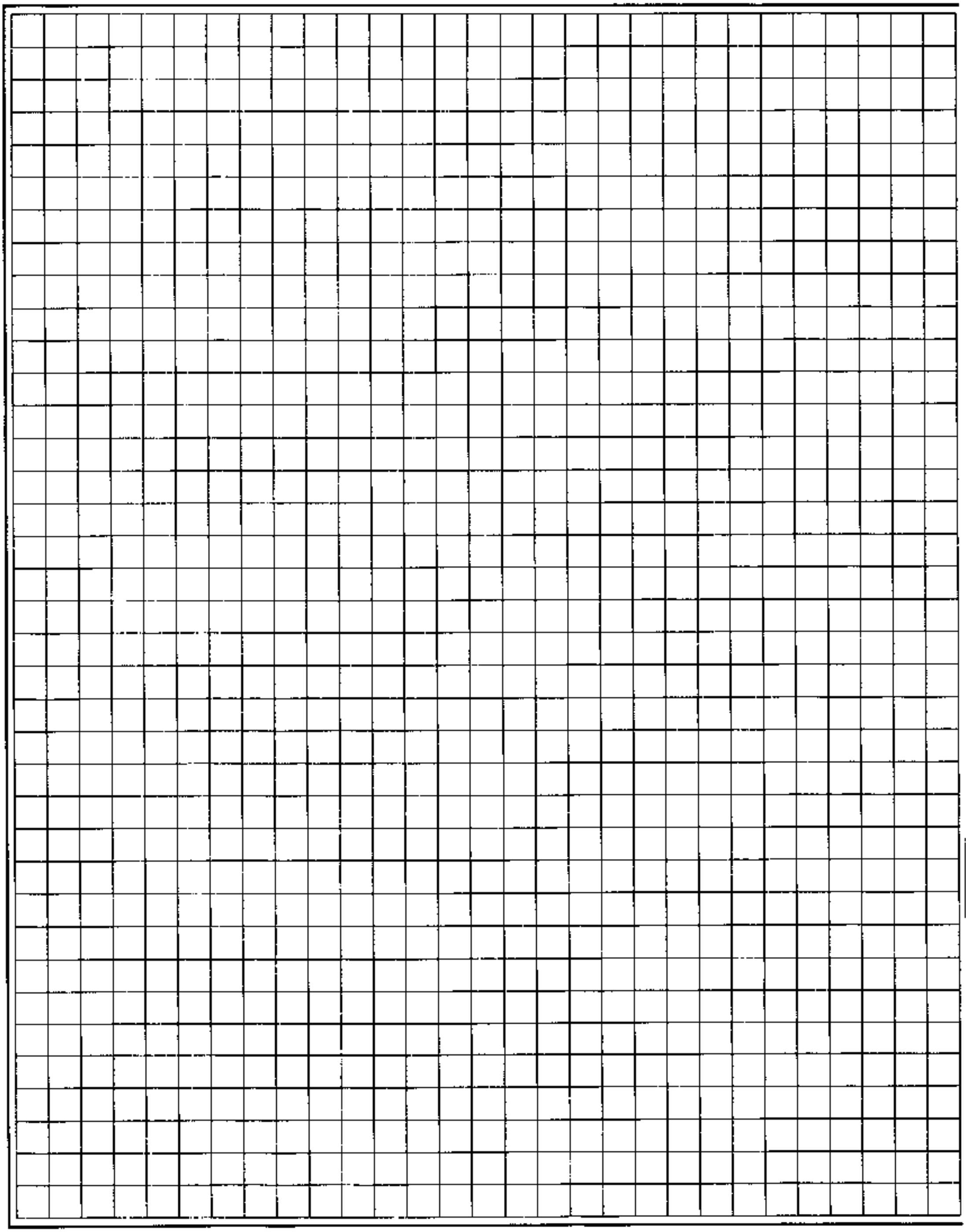
Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Общий вид первообразных $F(x)$
k (постоянная)	$k' = 0$	$F(x) = kx + C$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$
$x^\alpha = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ $(\alpha = -1)$		$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$ $(\alpha = -1)$
e^x	$\left(e^x\right)' = e^x$	$F(x) = e^x + C$
a^x	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = x\ln x - x + C$
$\log_a x$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$F(x) = \dfrac{x\ln x - x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$F(x) = -\cos x + C$
$\cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$F(x) = \sin x + C$
$\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$

$\mathrm{ctg}x$	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathrm{arctg}\, x$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	
$\mathrm{arcctg}\, x$	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$F(x) = \mathrm{tg}x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$F(x) = -\mathrm{ctg}x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$F(x) = \arcsin x + C$ или $F(x) = -\arccos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$		$F(x) = \mathrm{arctg}x + C$ или $F(x) = -\mathrm{arcctg}x + C$

Основные методы решения уравнений

Вид уравнения	Примеры уравнений	
	Замена переменной	Разложение на множители
Рациональное	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
Иррациональное	$\sqrt{x+1} - 5\sqrt[4]{x+1} + 4 = 0$	$(x-3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2x - 6$
Тригонометрическое	$\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$	$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$
Показательное	$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$	$8^x - 2 \cdot 4^x - 2^x + 2 = 0$
Логарифмическое	$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$	$\lg(x^2 - x - 2) = 1 + \lg(x+1)\lg(x-2)$

Дополнительные формулы и соотношения



СОДЕРЖАНИЕ

Ершова Алла Петровна
Голобородько Вадим Владимирович
Крижановский Александр Феликсович

Тетрадь-конспект по алгебре и началам анализа для 11 класса

Оформление обложки *А.А. Андреев*
Ответственный за выпуск *К.П. Бондаренко*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*

Подписано в печать 24.09.2010. Формат 70×90/16.
Усл.-печ. л. 10,53. Тираж 3000 экз. Зак. № 4507.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.